

Полиномиальные матричные неравенства в задачах анализа систем управления

Поздяев Владимир Васильевич

НГТУ им. Р. Е. Алексеева
Арзамасский филиал

Общероссийский семинар
«Информатика, управление и системный анализ»
МГУ, ВМК, 03.2019

Мотивация

- ▶ Существует ряд задач теории управления, естественным образом сводящихся к задачам оптимизации с участием полиномиальных — но не линейных — матричных неравенств.
- ▶ Известные методы решения таких задач имеют слабый баланс характеристик: являются эффективными, но излишне специализированными; универсальными, но плохо масштабируемыми и т. д.

План

1. Открытые задачи анализа систем управления.
2. Предлагаемые методы решения задач ПМН.
3. Предлагаемые методы сведения к задачам ПМН.
4. Примеры и сравнение.

*ПМН: полиномиальные матричные неравенства. Задачи ПМН: задачи оптимизации с полиномиальной целевой функцией и ограничениями в виде ПМН.

Открытые задачи анализа систем управления

2D-системы

Частный случай многомерных, или многопараметрических, систем (nD -систем).

Первоначальные приложения в обработке изображений, моделировании электрических схем.

Также: системы с распределёнными параметрами; распространение возмущений; повторяющиеся процессы и итеративное обучение. Последние применяются, например, в моделировании и управлении химическими реакциями, прокатом металла, резанием пластов при добыче угля.

2D-системы

Существуют различные модели. Основная рассматриваемая модель:
непрерывно-дискретные системы

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x_c(t, k) &= A_{cc}x_c(t, k) + A_{cd}x_d(t, k) + B_c u(t, k), \\ x_d(t, k + 1) &= A_{dc}x_c(t, k) + A_{dd}x_d(t, k) + B_d u(t, k), \\ y(t, k) &= C_c x_c(t, k) + C_d x_d(t, k) + D u(t, k),\end{aligned}$$

где $t \in \mathbb{R}$ и $k \in \mathbb{N}_0$ — непрерывная и дискретная переменные, $x_c \in \mathbb{R}^{n_c}$ и $x_d \in \mathbb{R}^{n_d}$ — непрерывное и дискретное состояния.

2D-системы

Экспоненциальная устойчивость: существование таких $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$, что

$$\left\| \begin{pmatrix} x_c(t, k) \\ x_d(t, k) \end{pmatrix} \right\|_2 \leq \beta \rho e^{-\gamma \min\{t, k\}},$$
$$\rho = \max \left\{ \sup_{t \geq 0} \|x_d(t, 0)\|_2, \sup_{k \geq 0} \|x_c(0, k)\|_2 \right\},$$

для всех начальных условий $x_c(0, k) \in \mathbb{R}^{n_c}$ и $x_d(t, 0) \in \mathbb{R}^{n_d}$ для всех $t \geq 0$ и $k \geq 0$.

Передаточная функция:

$$F(s, z) = C(s)(zI - A(s))^{-1}B(s) + D(s),$$
$$A(s) = A_{dc}(sI - A_{cc})^{-1}A_{cd} + A_{dd},$$
$$B(s) = A_{dc}(sI - A_{cc})^{-1}B_c + B_d,$$
$$C(s) = C_c(sI - A_{cc})^{-1}A_{cd} + C_d,$$
$$D(s) = C_c(sI - A_{cc})^{-1}B_c + D,$$

Задачи анализа: проверка устойчивости, нахождение \mathcal{H}_2 - и \mathcal{H}_∞ -норм.

Проверка устойчивости

[G. Chesi et al.] Экспоненциальная устойчивость такой системы с устойчивой матрицей A_{cc} и устойчивой по Шуру матрицей A_{dd} эквивалентна разрешимости задачи

$$\forall \omega \in \mathbb{R} :$$

$$P(\omega) \geq cI,$$

$$P(\omega) - F(j\omega)^H P(\omega) F(j\omega) \geq cI,$$

$$c > 0,$$

где $F(s) = A_{dc}(sI - A_{cc})^{-1}A_{cd} + A_{dd}$; j — мнимая единица; $c \in \mathbb{R}$ — неизвестная величина; $P(\omega) \in \mathbb{C}^{n_d \times n_d}$ — неизвестная эрмитова матричная функция (которая может быть найдена в виде полинома ограниченной степени).

Особенности задачи

- ▶ Комплексные величины.
- ▶ Рациональные функции.
- ▶ Полиномиальные матричные неравенства.
- ▶ Поиск полиномов.

Устойчивость и нормы систем с параметрической неопределённостью

Система:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(r)x(t) + B(r)u(t), \\ y(t) &= C(r)x(t) + D(r)u(t),\end{aligned}$$

где x — состояние, u — управление, y — выход, $r \in \mathcal{U}$ — параметр, формирующий неопределённость, $\mathcal{U} = \{r \mid U(r) \geq 0\}$, где U — симметричный матричный полином; A , B , C и D — матричные полиномы совместимых размеров.

Устойчивость и нормы систем с параметрической неопределённостью

Анализ устойчивости:

$$\forall r \in \mathcal{U} :$$

$$A(r)^T P(r) + P(r) A(r) < 0,$$

$$P(r) > 0.$$

Структура задачи практически идентична таковой для 2D-систем.
Отличия:

- ▶ задачи изначально вещественны;
- ▶ вместо ω ($j\omega$, $e^{j\omega}$) используется неопределённый параметр;
- ▶ дополнительные ПМН-ограничения на значения параметра.

Аналогичную же структуру (с другими матричными неравенствами) имеют задачи о поиске \mathcal{H}_2 - и \mathcal{H}_∞ -норм.

Предлагаемые этапы решения

- ▶ Преобразование к форме задачи ПМН.
- ▶ Разработка нового метода решения полученной задачи.

Предлагаемые методы
решения задач ПМН

Линейные матричные неравенства

- ▶ Задачи выпуклой оптимизации

$$\begin{aligned}c^T x &\rightarrow \min, \\ F(x) &\geq 0.\end{aligned}$$

- ▶ Полуопределённое программирование и задачи ЛМН.
- ▶ Методы внутренней точки.

Полиномиальные матричные неравенства

- ▶ Задачи ПМН:

$$\begin{aligned} f^* &= \min f(x), \\ G_i(x) &\geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ x &\in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

- ▶ Локальные и глобальные методы.
- ▶ ЛМН-релаксации.

Метод моментов

[J.-B. Lasserre, D. Henrion]

Пусть $d_i = \lceil \frac{1}{2} \deg g_i(x) \rceil$; пусть $k \in \mathbb{N}$, $2k \geq \deg f(x)$, $k \geq d_i$.

Пусть $y = y(x) = \int b_{2k}(x) d\mu$ — вектор моментов порядка $\leq 2k$ для неизвестной меры μ .

$$f^* = \min_y \sum_j f_j y_j,$$

$$M_k(y) \geq 0,$$

$$M_{k-d_i}(G_i, y) \geq 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$y_{[0,0,\dots,0]} = 1.$$

Здесь f_j — координаты $f(x)$ в базисе $b_{2k}(x)$ из одночленов, порождающих моменты y_j :

$$b_r(x) = \left[1 \quad x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n \quad x_1^2 \quad x_1 x_2 \quad \dots \quad x_n^2 \quad \dots \quad x_n^r \right]^T.$$

Матрицы моментов, локализирующие матрицы

$$M_k(y) \equiv \int b_k(x) b_k(x)^T d\mu,$$

$$M_{k-d}(G, y) \equiv \int (b_{k-d}(x) b_{k-d}(x)^T) \otimes G(x) d\mu$$

Базовая схема

- ▶ Трансформация: переход в пространство моментов. Построение ЛМН-релаксации задачи ПМН.
- ▶ Нахождение моментов: решение полученной задачи ЛМН.
 - ▶ Результат: моменты т. н. N -атомной меры (меры с носителем в виде множества из N точек-атомов).
- ▶ Трансформация: переход в пространство атомов. Нахождение атомов полученной меры.

Атомная оптимизация

Чтобы не столкнуться с комбинаторным взрывом, будем избегать пространства моментов и ЛМН-релаксаций:

- ▶ Сконструируем задачу со следующими свойствами:
 - ▶ она эквивалентна ЛМН-релаксации;
 - ▶ ее пространство поиска — пространство атомов, не моментов.
- ▶ Решим эту задачу методом внутренней точки. Выберем направление спуска (в пространстве атомов) эквивалентным направлению спуска (в пространстве моментов), которое было бы использовано при решении исходной ЛМН-релаксации тем же методом.

Решение ЛМН-релаксации

Общая структура системы:

$$f^* = \min_y c^T y,$$

$$F(y) = \text{diag}(M_k(y), M_{k-d_1}(G_1, y), \dots) = \sum_{\alpha \leq 2k} F_\alpha y_\alpha \geq 0,$$

$$\nu_y y = y_{[0,0,\dots,0]} = 1.$$

Решение ЛМН-релаксации

Последовательность барьерных функций:

$$f^{(i)}(y) = c^T y - \mu^{(i)} \log \det F(y).$$

$\Delta y = \Delta y(y)$ — ньютоновское направление спуска:

$$\Delta y = H_y^- \left(-g_y + \frac{\nu_y^T H_y^- g_y}{\nu_y^T H_y^- \nu_y} \nu_y \right);$$

$$[g_y]_\alpha = c_\alpha - \mu^{(i)} \operatorname{tr} \left(F^{-1}(y) \left(\frac{d}{dy_\alpha} F(y) \right) \right);$$

$$[H_y]_{\alpha\beta} = \mu^{(i)} \operatorname{tr} \left(F^{-1}(y) \left(\frac{d}{dy_\alpha} F(y) \right) F^{-1}(y) \left(\frac{d}{dy_\beta} F(y) \right) \right).$$

Атомы

Новое пространство поиска состоит из векторов

$$\begin{aligned} z &= [x_{11} \quad x_{12} \quad \dots \quad x_{1n} \quad x_{21} \quad \dots \quad x_{rn} \quad p_1 \quad p_2 \quad \dots \quad p_r] = \\ &= [x_1^T \quad x_2^T \quad \dots \quad x_r^T \quad p_1 \quad p_2 \quad \dots \quad p_r]^T, \end{aligned}$$

где $x_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \dots, r$, — атомы, $p_i \in (0; 1)$ — их веса.

Соответствующие моменты:

$$y_\alpha = y_\alpha(z) = \sum_{i=1}^r p_i x_i^\alpha = \sum_{i=1}^r p_i \prod_{j=1}^n x_{ij}^{\alpha_j}.$$

Эквивалентная задача

Общая структура системы:

$$f^* = \min_z \tilde{f}(z) = \min_z \sum_{j=1}^r p_j f(x_j),$$

$$F(z) = \text{diag}(M_k(z), M_{k-d_1}(G_1, z), \dots) \geq 0,$$

$$\nu_z^T z = \sum_{j=1}^r p_j = 1.$$

Эквивалентная задача

$$M_k(z) = \sum_{j=1}^r p_j (b_k(x_j) b_k(x_j)^T);$$

$$M_{k-d_i}(G_i, z) = \sum_{j=1}^r p_j (b_{k-d_i}(x_j) b_{k-d_i}(x_j)^T) \otimes G_i(x_j), \quad i = 1, \dots, m.$$

Редуцированная задача

$$f^* = \min_z \sum_{j=1}^r p_j f(x_j),$$

$$\bar{F}_0 = M_0'^T V \text{diag}(p_1, p_2, \dots, p_r) V^T M_0' \geq 0,$$

$$F_i = \sum_{j=1}^r p_j G_i(x_j) \geq 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$\bar{F}_{ij} = p_j G_i(x_j) + \lambda I \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, r,$$

$$\sum_{j=1}^r p_j = 1,$$

где $M_0' = \text{diag}([1], M_0)$; $M_0 \in \mathbb{R}^{n \times (r-1)}$ — матрица, чьи столбцы образуют произвольный базис $(r-1)$ -D гиперплоскости, проходящей через текущие x_i ; и

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_{11} & x_{21} & \dots & x_{r1} \\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{r2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \dots & x_{rn} \end{bmatrix}.$$

Эквивалентный алгоритм решения

... имеет тот же вид, отличаясь лишь барьерными функциями и направлением спуска:

$$f^{(i)}(z) = \tilde{f}(z) - \mu^{(i)} \log \det F(z);$$

$$\Delta z = \tilde{H}_z^- \left(-g_z + \frac{\nu_z^\top \tilde{H}_z^- g_z}{\nu_z^\top \tilde{H}_z^- \nu_z} \nu_z \right);$$

$$[g_z]_j = \frac{d}{dz_j} \tilde{f}(z) - \mu^{(i)} \operatorname{tr} \left(F^{-1}(z) \left(\frac{d}{dz_j} F(z) \right) \right);$$

$$[\tilde{H}_z]_{jk} = \mu^{(i)} \operatorname{tr} \left(F^{-1}(z) \left(\frac{d}{dz_j} F(z) \right) F^{-1}(z) \left(\frac{d}{dz_k} F(z) \right) \right).$$

Предлагаемые методы
сведения к задачам ПМН

2D-системы: альтернативная форма задачи об устойчивости

$$c^* = \min_{\omega} \max_{P,c} c,$$

$$P - cI \geq 0,$$

$$P - F(j\omega)^H P F(j\omega) - cI \geq 0,$$

$$\text{tr } P = 1;$$

$$c^* > 0.$$

Переход к двойственной форме

Разрешимость

$$P - F^H P F > 0, \quad P = P^H > 0,$$

эквивалентна неразрешимости

$$F Z F^H - Z \geq 0, \quad Z = Z^H \geq 0,$$

и наоборот.

Квази-двойственная форма

Задача ПМН:

$$c^* = \max_{Z, c, \omega} c,$$

$$Z - cI \geq 0,$$

$$F(j\omega)ZF(j\omega)^H - Z - cI \geq 0,$$

$$\text{tr } Z = 1,$$

$$Z = Z^H \in \mathbb{C}^{n_d \times n_d}, \quad c \in \mathbb{R}, \quad \omega \in \mathbb{R};$$

$$c^* \geq 0.$$

Неразрешимость данной задачи есть необходимое или необходимое и достаточное условие устойчивости в зависимости от наличия гарантии нахождения глобального экстремума.

Поиск \mathcal{H}_∞ -нормы

[G. Chesi et al.] Прямая задача ($\hat{\gamma}_\infty(2d) = \sqrt{\hat{\xi}(2d)}$):

$$\hat{\xi}(2d) = \inf_{P, \xi, c} \xi,$$

$$\forall \omega \in \mathbb{R} : V(\xi, \omega) - c |g(j\omega)|^2 I \geq 0,$$

$$c > 0,$$

$$\deg(P(\omega)) = 2d,$$

$$V(\xi, \omega) = |g(j\omega)|^2 \begin{pmatrix} P(\omega) & F_1(j\omega)P(\omega) & F_2(j\omega) & 0 \\ * & P(\omega) & 0 & P(\omega)F_3(j\omega)^H \\ * & * & I & F_4(j\omega)^H \\ * & * & * & \xi I \end{pmatrix},$$

$$F_1(s) = A_{dc}(sI - A_{cc})^{-1}A_{cd} + A_{dd},$$

$$F_2(s) = A_{dc}(sI - A_{cc})^{-1}B_c + B_d,$$

$$F_3(s) = C_c(sI - A_{cc})^{-1}A_{cd} + C_d,$$

$$F_4(s) = C_c(sI - A_{cc})^{-1}B_c + D.$$

Альтернативная форма

$$f^* = \max_{\omega} \min_{\lambda, P} \lambda,$$

$$\begin{bmatrix} P & A(j\omega)P & B(j\omega) & 0 \\ PA(j\omega)^H & P & 0 & PC(j\omega)^H \\ B(j\omega)^H & 0 & I & D(j\omega)^H \\ 0 & C(j\omega)P & D(j\omega) & \lambda I \end{bmatrix} \geq 0,$$

Переход к двойственной форме

Задача, двойственная к

$$f^* = \min_{\lambda, P} \lambda,$$

$$\begin{bmatrix} P - A^T P A & -A^T P B \\ -B^T P A & \lambda I - B^T P B \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C^T C & C^T D \\ D^T C & D^T D \end{bmatrix} \geq 0,$$

$$P \geq 0,$$

может быть представлена в виде

$$g^* = \max_Z \text{tr} \begin{bmatrix} C^T C & C^T D \\ D^T C & D^T D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{12}^T & Z_{22} \end{bmatrix},$$

$$Z = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{12}^T & Z_{22} \end{bmatrix} = Z^T \geq 0,$$

$$\text{tr} Z_{22} = 1,$$

$$AZ_{11}A^T - Z_{11} + AZ_{12}B^T + BZ_{12}^T A^T + BZ_{22}B^T \geq 0,$$

где блоки Z_{ij} имеют соответствующие размеры.

Поиск \mathcal{H}_∞ -нормы

Квази-двойственная задача:

$$g^* = \max_{Z, \omega} \operatorname{tr} \begin{bmatrix} C(j\omega)^H C(j\omega) & C(j\omega)^H D(j\omega) \\ D(j\omega)^H C(j\omega) & D(j\omega)^H D(j\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{12}^H & Z_{22} \end{bmatrix},$$

$$Z = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{12}^H & Z_{22} \end{bmatrix} = Z^H \geq 0,$$

$$\operatorname{tr} Z_{22} = 1,$$

$$A(j\omega)Z_{11}A(j\omega)^H - Z_{11} + A(j\omega)Z_{12}B(j\omega)^H + \\ + B(j\omega)Z_{12}^H A(j\omega)^H + B(j\omega)Z_{22}B(j\omega)^H \geq 0,$$

где

$$A(s) = A_{dc}(sI - A_{cc})^{-1}A_{cd} + A_{dd},$$

$$B(s) = A_{dc}(sI - A_{cc})^{-1}B_c + B_d,$$

$$C(s) = C_c(sI - A_{cc})^{-1}A_{cd} + C_d,$$

$$D(s) = C_c(sI - A_{cc})^{-1}B_c + D.$$

Поиск \mathcal{H}_2 -нормы

$$\begin{aligned} \gamma_2^2 &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{tr} F(j\omega, e^{j\theta})^H F(j\omega, e^{j\theta}) \, d\theta \, d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{tr} f(j\omega, k)^H f(j\omega, k) \right) \, d\omega, \end{aligned}$$

где $f(s, k) = \mathcal{Z}_z^{-1}\{F(s, z)\}$, $s = j\omega$, — оригинал $F(s, z)$ по второму аргументу при условии, что s считается независимым параметром.

Поиск \mathcal{H}_2 -нормы

Пусть $F(s, z)$ — передаточная функция системы, и

$$H(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(s, k)^H f(s, k),$$

где $f(s, k) = \mathcal{Z}_z^{-1}\{F(s, z)\}$.

Тогда $H(s) = B(s)^H G(s) B(s) + D(s)^H D(s)$, где $G(s)$ — решение уравнения

$$A(s)^H G(s) A(s) - G(s) + C(s)^H C(s) = 0.$$

Норма вычисляется как $\gamma_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \operatorname{tr} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega) d\omega}$.

Примеры и сравнение

Стабилизация обратной связью по выходу

COMP_elib, усложнённая задача HE1.

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

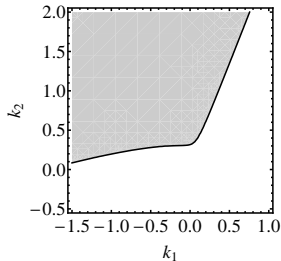
$$y = Cx,$$

$$u = Ky,$$

где $x \in \mathbb{R}^4$, $u \in \mathbb{R}^2$, $y \in \mathbb{R}^1$.

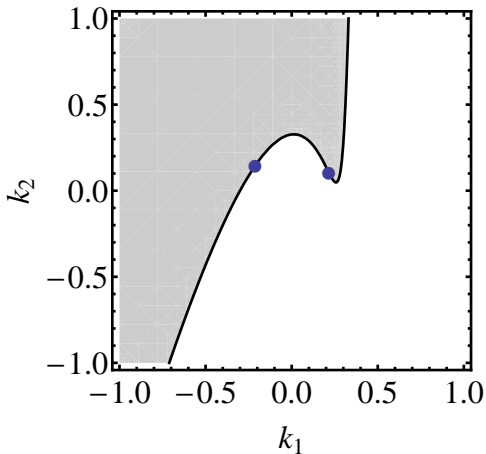
Найдем $K = [k_1 \ k_2]^T$ такое, что $k_1^2 + k_2^2 = \min$ и

$(A + BKC)^T P + P(A + BKC) \leq 0$. Множество стабилизирующих K :



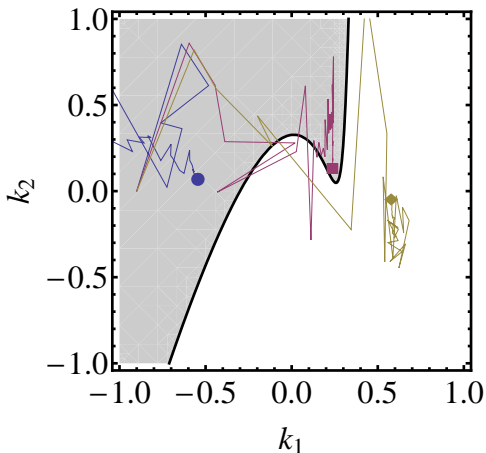
Пример: статическая обратная связь по выходу

Усилим невыпуклость задачи, применив линейное преобразование к K :



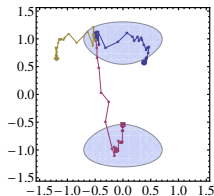
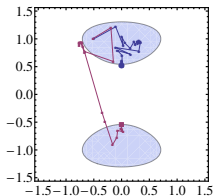
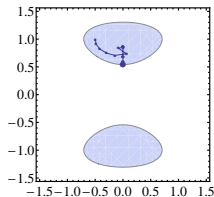
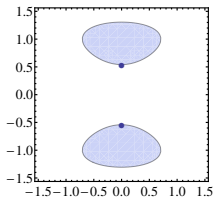
Пример: статическая обратная связь по выходу

Траектории атомов:



Пример с несвязной областью поиска

$$f^* = \min_x f(x) = \min_x (x_2 + 0,1)^2, \quad g_1(x) = 1 - 2x_1 - 2(x_2^2 - 1)^2 \geq 0.$$



Задача о проверке устойчивости

Непрерывно-дискретная 2D-система с

$$A_{cc} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_{cd} = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0 \\ -0.5 & 1.5 & 1 \\ -0.5 & 0 & \delta \end{bmatrix},$$

$$A_{dc} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0.4 \\ 0 & -0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 \end{bmatrix}, \quad A_{dd} = \begin{bmatrix} -0.4 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.3 \\ 0 & -0.4 & -0.2 \end{bmatrix},$$

и $\delta \in \{-1, 1\}$ (система устойчива для $\delta = 1$, неустойчива для $\delta = -1$).

Предшествующие результаты: сведение к ЛМН с числом переменных до десятков тысяч (для неустойчивой системы).

Новые результаты: задача ПМН с 11 вещественными скалярными неизвестными для одноатомной конфигурации (пропорционально больше для нескольких атомов), несколько десятков итераций спуска, те же выводы.

Задача о проверке устойчивости: шаги решения

1. Сформировать задачу

$$c^* = \max_{Z, c, \omega} c,$$

$$G_1(Z, c) = Z - cI \geq 0,$$

$$G_2(Z, c) = F(j\omega)ZF(j\omega)^H - Z - cI \geq 0,$$

$$\operatorname{tr} Z = 1,$$

$$Z = Z^H \in \mathbb{C}^{n_d \times n_d}, \quad c \in \mathbb{R}, \quad \omega \in \mathbb{R};$$

$$c^* \geq 0,$$

где $F(s) = A_{dc}(sI - A_{cc})^{-1}A_{cd} + A_{dd}$.

2. Привести к задаче ПМН, умножив каждое неравенство на квадрат нормы общего знаменателя.

3. Привести к вещественной форме, заменив комплексные неравенства вида $M \geq 0$ на

$$\begin{bmatrix} \operatorname{Re} M & \operatorname{Im} M \\ -\operatorname{Im} M & \operatorname{Re} M \end{bmatrix} \geq 0.$$

Задача о проверке устойчивости: шаги решения

4. Привести к атомизированной форме

$$f^* = \min_z \sum_{j=1}^r p_j f(x_j),$$

$$\bar{F}_0 = M_0'^T V \operatorname{diag}(p_1, p_2, \dots, p_r) V^T M_0' \geq 0,$$

$$F_i = \sum_{j=1}^r p_j G_i(x_j) \geq 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$\bar{F}_{ij} = p_j G_i(x_j) + \lambda I \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, r,$$

$$\sum_{j=1}^r p_j = 1.$$

5. Применить соответствующий метод внутренней точки.

Задача об \mathcal{H}_∞ -норме

$$A_{cc} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_{cd} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.3 \\ -0.2 & 0.6 \end{bmatrix},$$

$$A_{dc} = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.6 \\ -0.6 & 1.0 \end{bmatrix}, \quad A_{dd} = \begin{bmatrix} 0.2 & -0.5 \\ 0.3 & 0.4 \end{bmatrix},$$

$$B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_d = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T, \quad C_d = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}^T, \quad D = -0.3.$$

Предшествующие результаты:

- ▶ сложные преобразования задачи к форме ЛМН (т. н. квадратичному матричному представлению);
- ▶ необходимость угадать порядок полинома $P(\omega)$;
- ▶ авторы рассматривают только минимальный порядок $2d = 0$, получают ЛМН с 281 скалярной неизвестной.

Новые результаты: прямолинейные преобразования задачи; задача ПМН с 9 вещественными скалярными неизвестными для одноатомной конфигурации (пропорционально больше для нескольких атомов), несколько десятков итераций спуска.

Ключевые элементы результатов вычислений идентичны: $\omega^* \approx 2.944$, значение нормы $\sqrt{g^*} \approx 2.055$.

Задача об \mathcal{H}_2 -норме

$$A_{cc} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_{cd} = \begin{bmatrix} 0.4 & -0.8 \\ 0.6 & 0.6 \end{bmatrix},$$

$$A_{dc} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{dd} = \begin{bmatrix} 0.3 & -0.5 \\ 0.5 & 0.3 \end{bmatrix},$$

$$B_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B_d = 0_{2 \times 2}, \quad C_c = 0_{2 \times 2}, \quad C_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = 0_{2 \times 2}.$$

Предшествующие результаты:

- ▶ сложные преобразования задачи к форме ЛМН (т. н. квадратичному матричному представлению);
- ▶ необходимость угадать порядок полинома $P(\omega)$;
- ▶ авторы рассматривают порядки $2d = 2, 4, \dots, 10$, получают ЛМН с 13, 31, \dots , 133 скалярными неизвестными;
- ▶ результат — консервативные верхние границы нормы: 3.166, 2.373, \dots , 1.765.

Новые результаты: прямолинейные преобразования задачи; точное значение нормы: 1.719.

Заключение

- ▶ Метод решения задач ПМН с характером невыпуклости, типичным для задач теории управления. Метод занимает промежуточное положение между локальными и глобальными методами; позволяет контролировать баланс объёма вычислений и полноты исследования области поиска; способен решать задачи с различным характером невыпуклости, в т. ч. с несвязной областью поиска.
- ▶ Приведение к форме ПМН с помощью построения двойственных форм подзадач ряда задач анализа устойчивости и вычисления норм 2D-систем.
- ▶ Способ нахождения \mathcal{H}_2 -норм 2D-систем, требующий значительно меньше вычислительных ресурсов по сравнению с существующими аналогами и дающий более точный результат.