ОБЩЕРОССИЙСКИЙ СЕМИНАР
«ИНФОРМАТИКА, УПРАВЛЕНИЕ И СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ»
16 июня 2020 г.

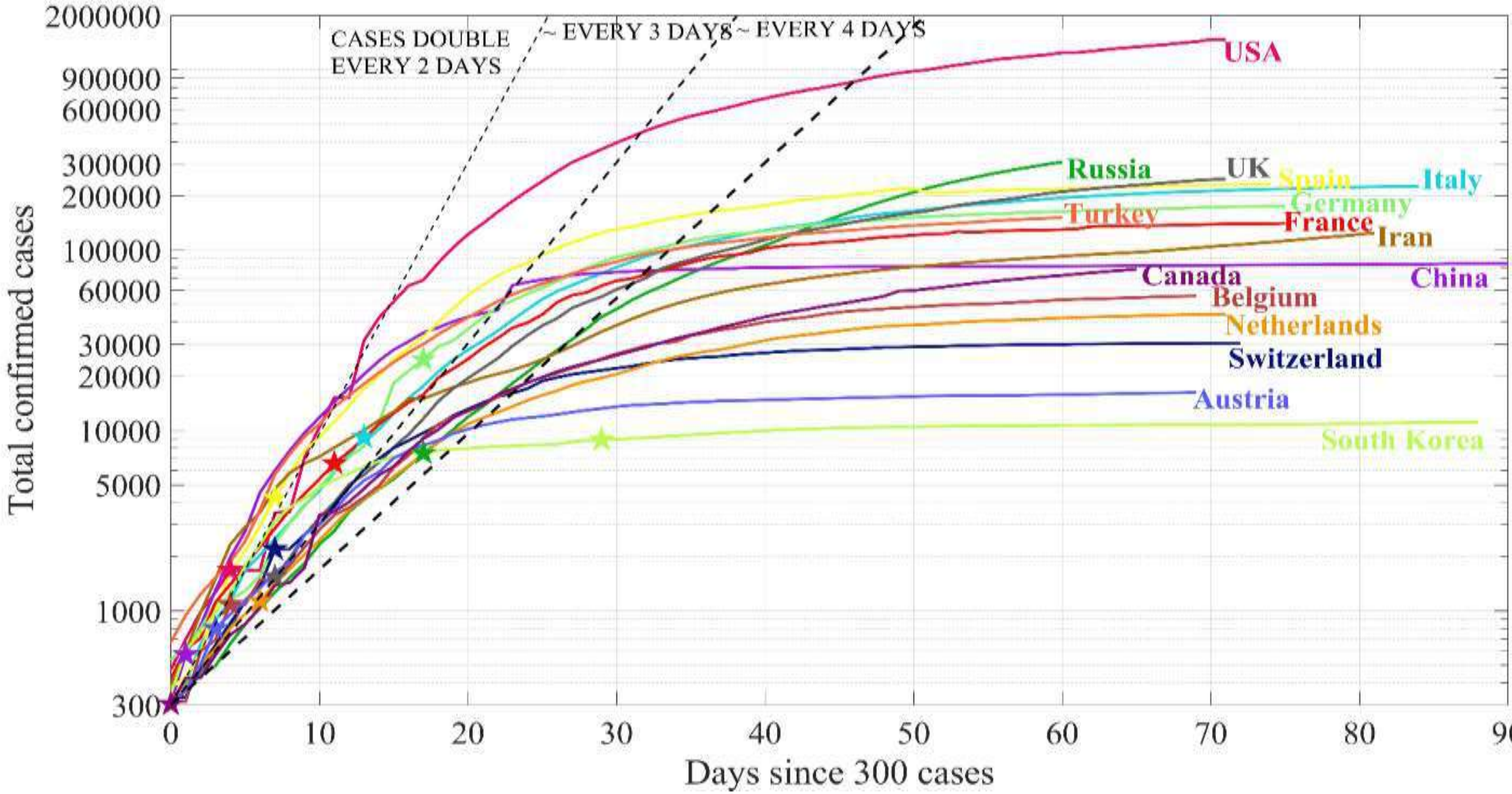
Логистическое уравнение и COVID-19

Куркин Андрей Александрович, д.ф.-м.н., проф.,
Пелиновский Е.Н., Куркина О.Е., Кокоулина М.В., Епифанова А.С.

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева

http://lmnad.nntu.ru/ru/projects/covid19/

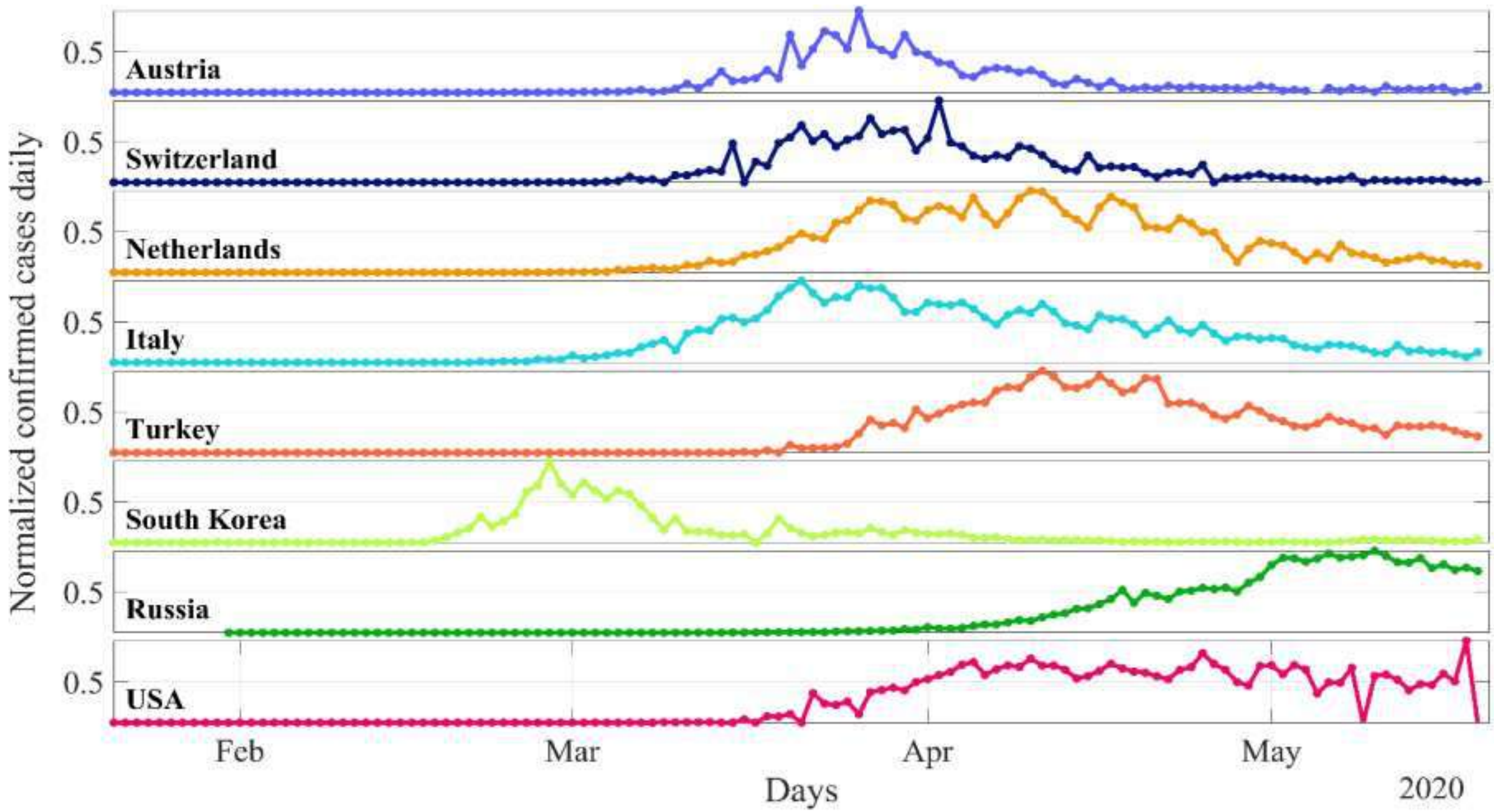
Подтвержденное количество людей, зараженных коронавирусом на 20.05.2020



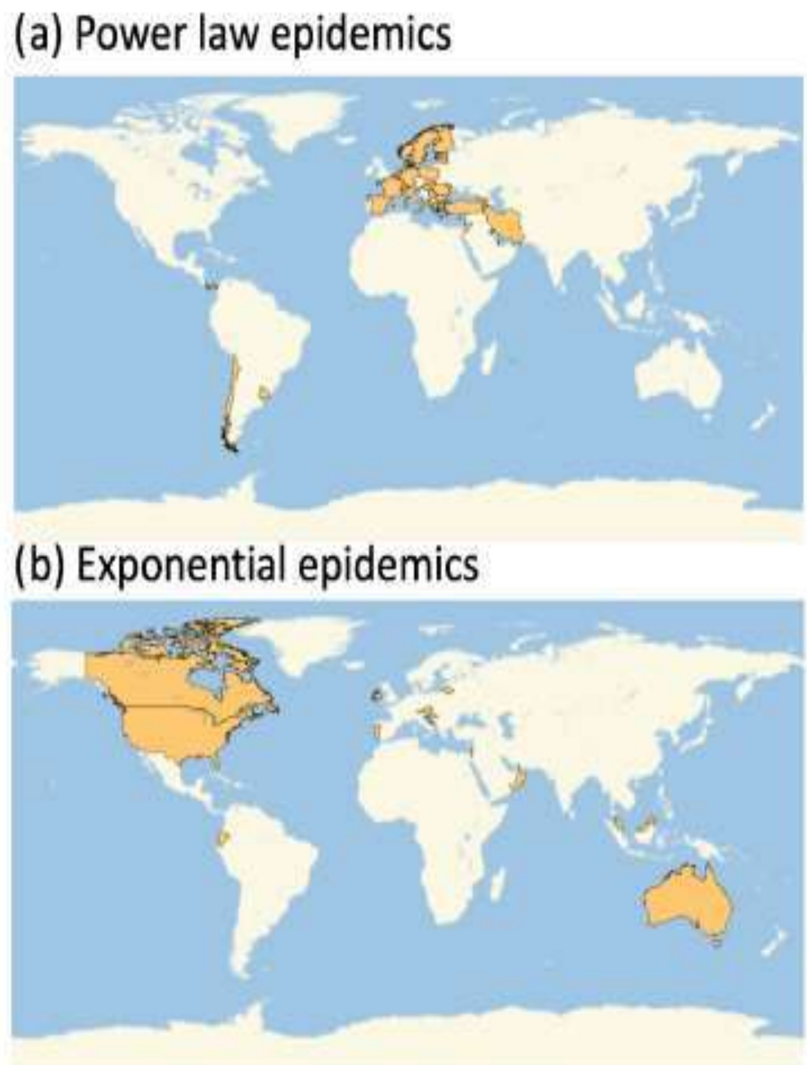
(https://www.who.int/emergencies/diseases/novel-coronavirus-2019/situation-reports)

Звездочка – дата введения карантина

Количество зараженных людей в день, нормированное на максимальное значение для каждой страны



Для объяснения скорости распространения эпидемий и прогнозирования их последствий используется ряд математических моделей различной сложности. Исторически первой моделью является логистическое уравнение Ферхюльста (Verhulst, 1838). Анализ данных COVID-19, сделанный в (Komarova and Wodarz, 2020, https://doi.org/10.1101/2020.03.30.20047274), показал, что экспоненциальный рост числа заболевших на начальном этапе встречается главным образом в Америке и Австралии, в то время как во многих европейских странах он является степенным. В этом случае, можно использовать обобщенное логистическое уравнение (Blumberg, 1968; Brilhante et al, 2019)



Логистическое уравнение

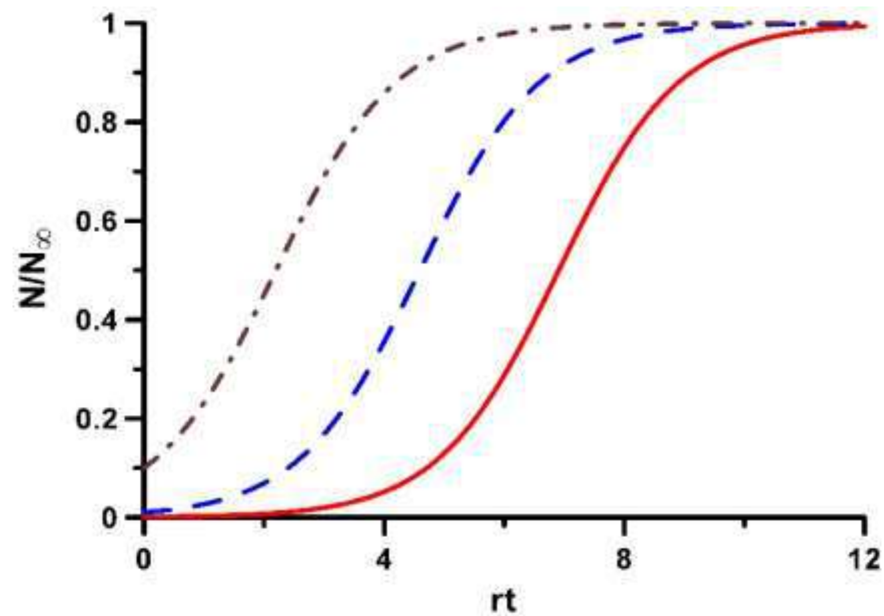
$$\boxed{\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{N_\infty}\right)}$$

$N(t)$ – число заболевших людей при эпидемии,
N_∞ - максимально возможное число заболевших людей,
r– скорость роста (частота) эпидемии

Две неизвестных константы!

$$N(t) = \frac{N_0 N_\infty \exp(rt)}{N_\infty + N_0\left[\exp(rt) - 1\right]}$$

N_0 – начальное число заболевших людей,
t – время, отсчитываемое от начала эпидемии



Логистическое уравнение

$$K = \frac{dN}{dt} = \frac{N_0 N_\infty (N_\infty - N_0) r \exp(rt)}{\left(N_\infty + N_0\left[\exp(rt) - 1\right]\right)^2}$$

количество заболевших в сутки

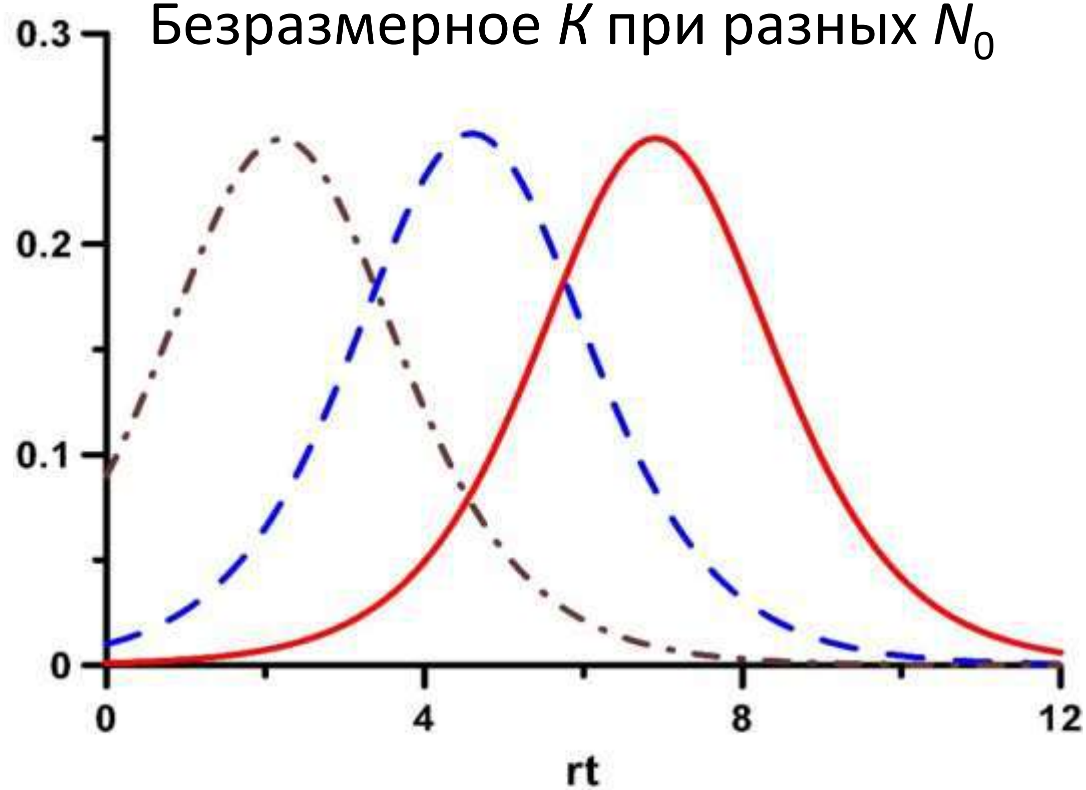
Количество больниц

$$\boxed{\max(K) = \frac{rN_\infty}{4}}$$

Пик эпидемии

$$\boxed{T = \frac{1}{r}\ln\frac{N_\infty - N_0}{N_0}}$$

Безразмерное K при разных N_0

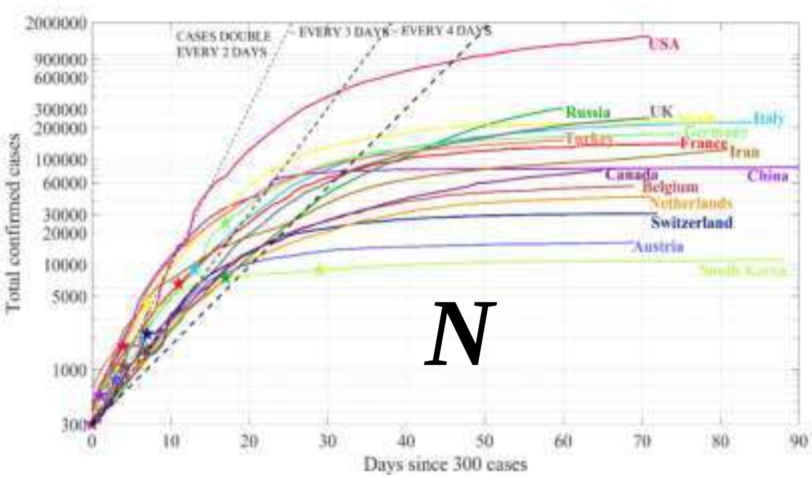


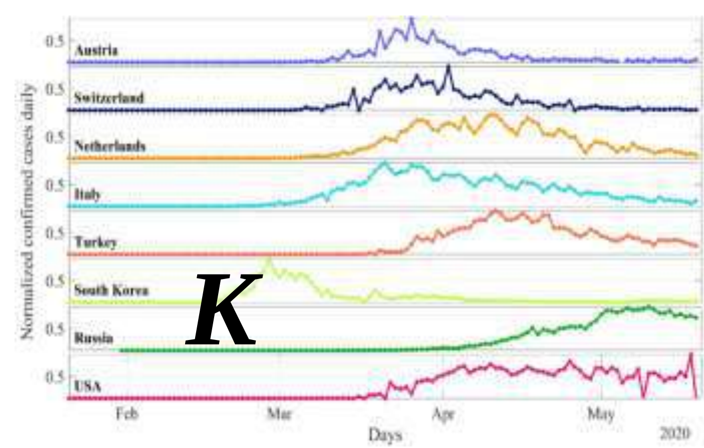
Дискретное логистическое уравнение

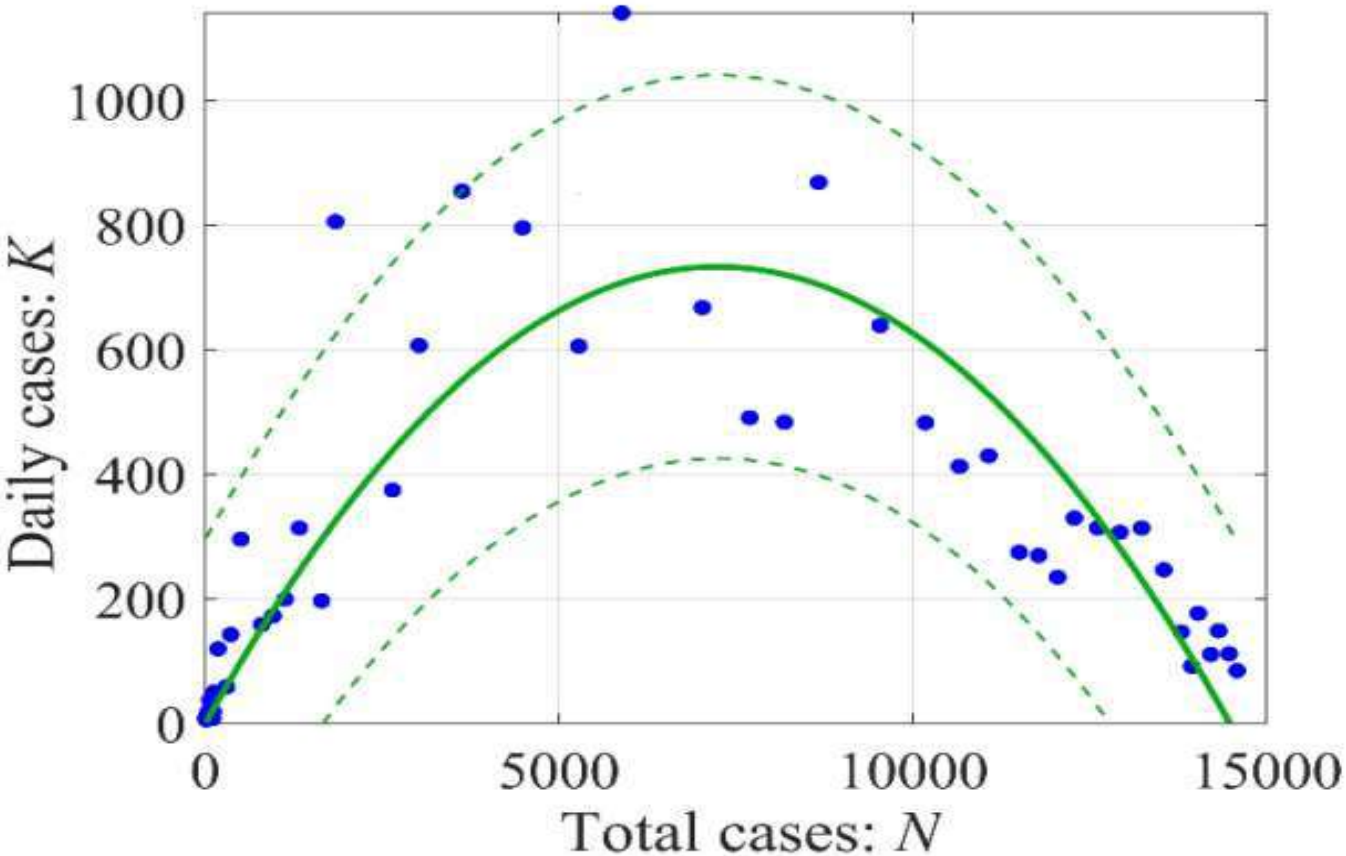
$$K_n = N_{n+1} - N_n = rN_n\left(1 - \frac{N_n}{N_\infty}\right)$$

медицинская статистика оперирует с данными заболевших раз в сутки

$$\boxed{K = rN\left(1 - \frac{N}{N_\infty}\right)}$$







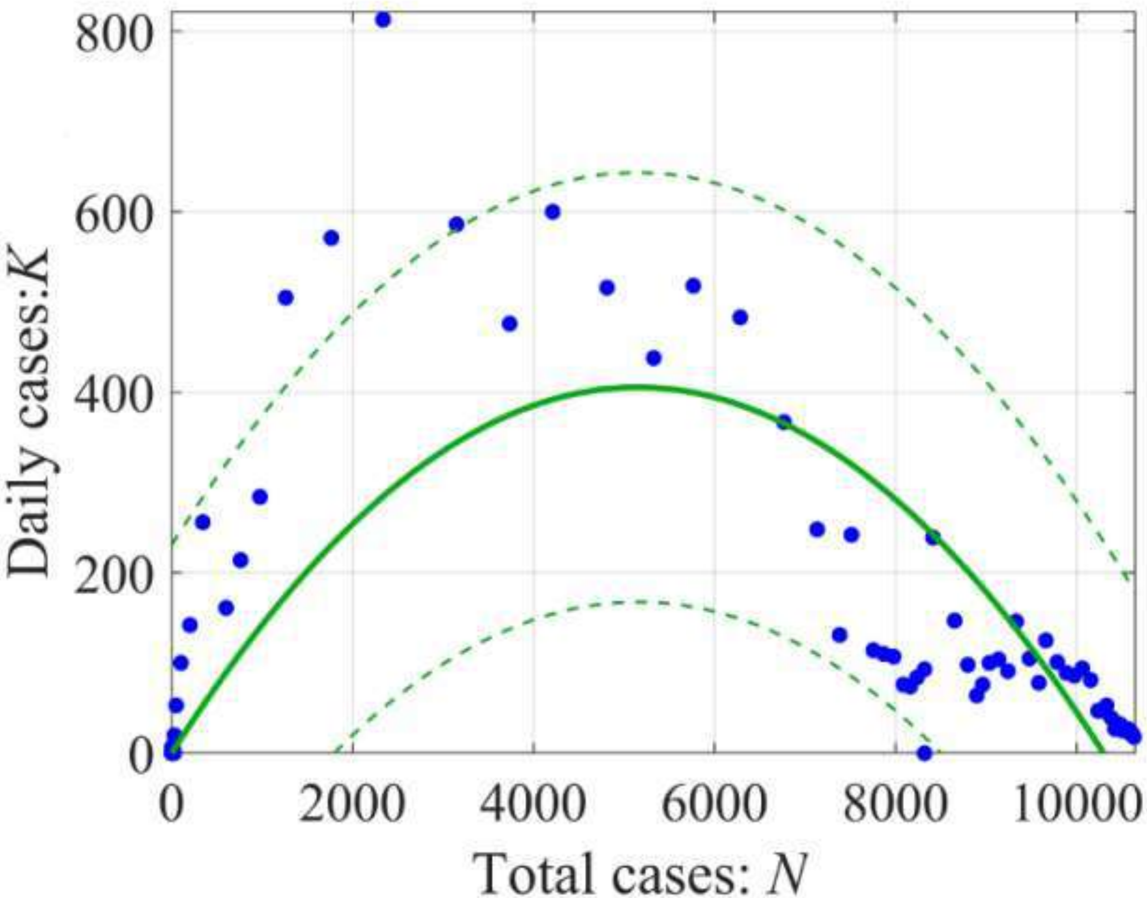
Австрия

$N_\infty = 14700$

$r = 0.195$

$R^2 = 0.81$

сплошная зеленая линия – регрессионная кривая, пунктирные линии – 95% доверительный интервал

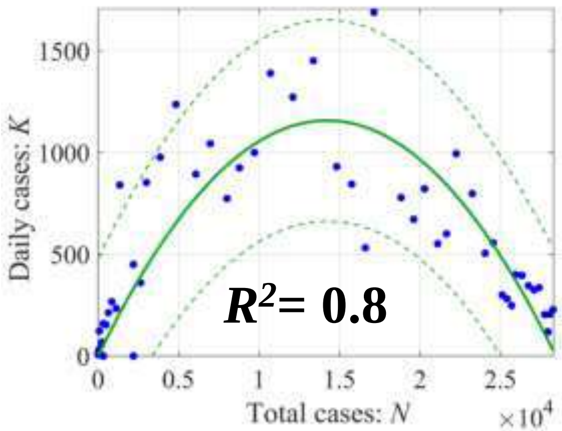


Южная Корея

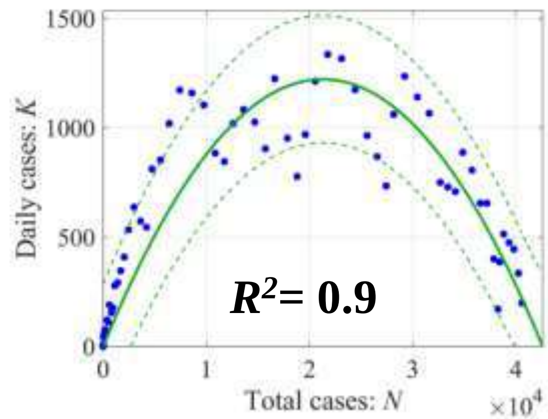
$$N_\infty = 10300$$

$$r = 0.16$$

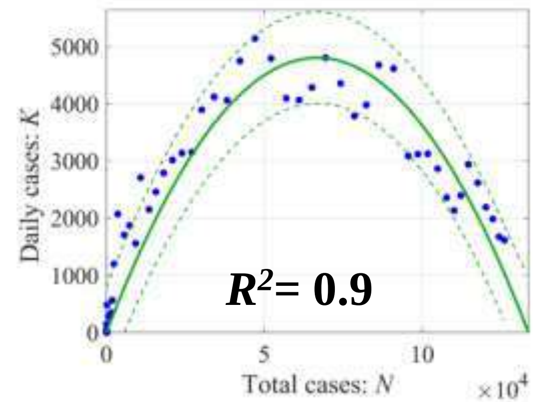
$$R^2 = 0.55$$



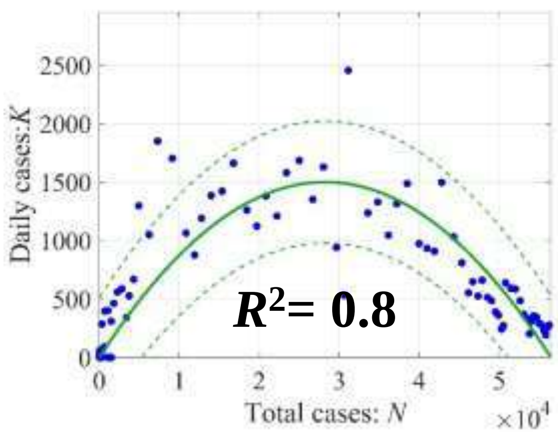
Швейцария



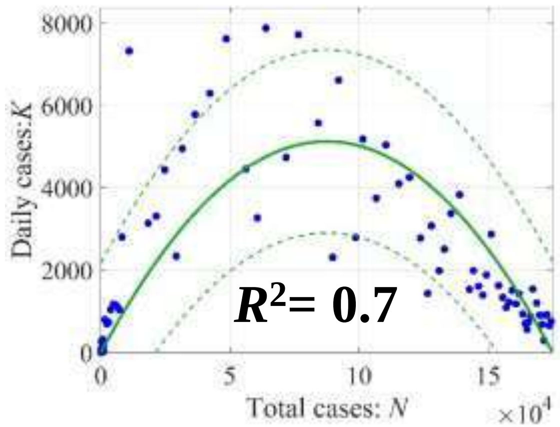
Нидерланды



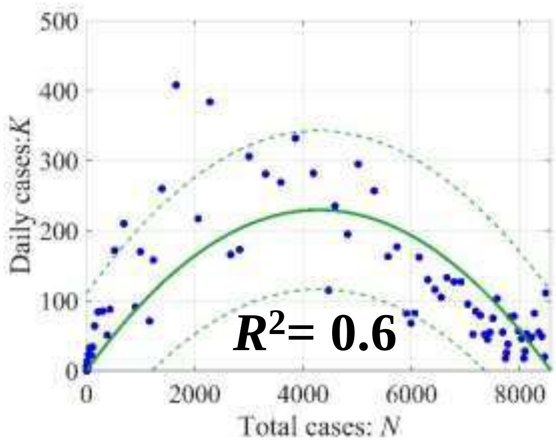
Турция



Бельгия

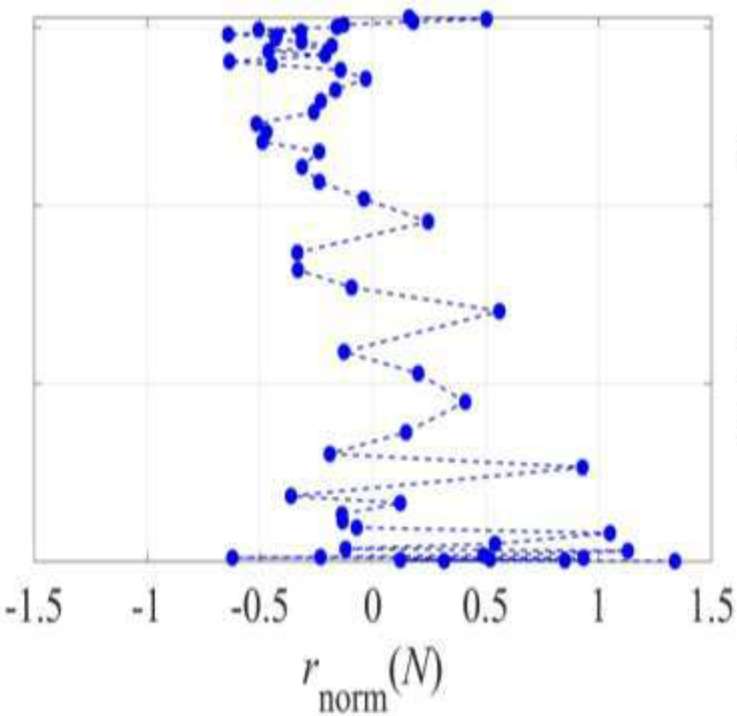


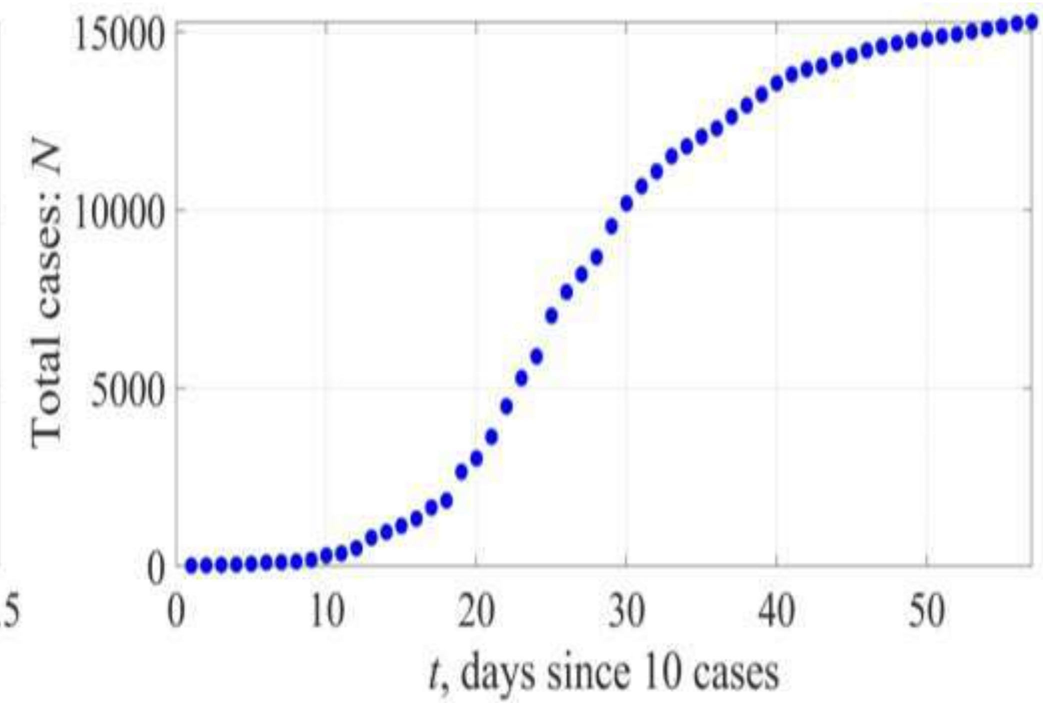
Германия



Чехия

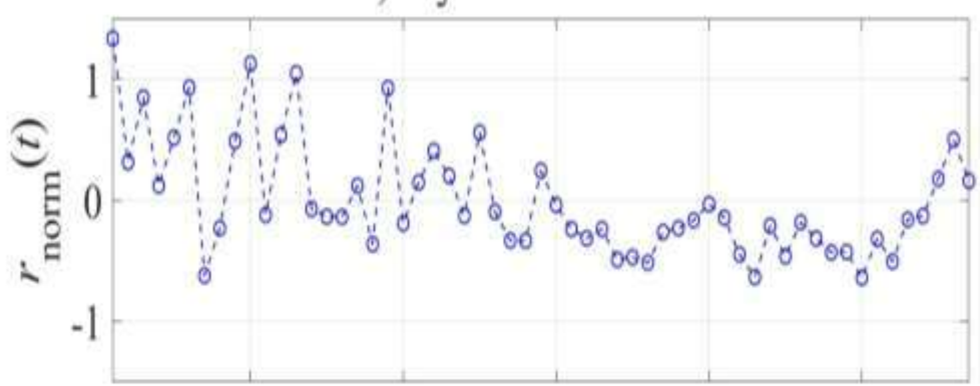
Изменчивость коэффициента *r* (Австрия)



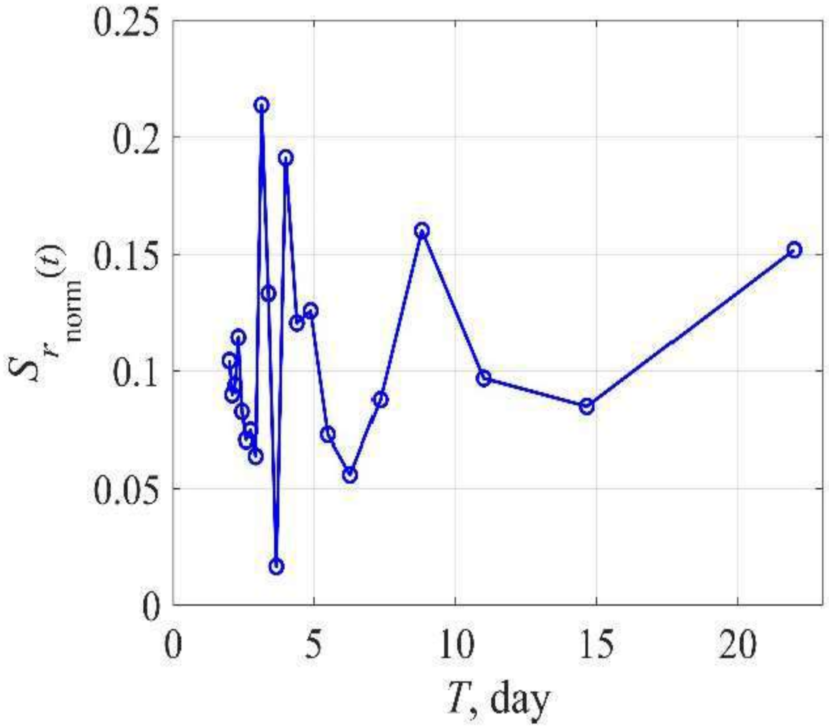


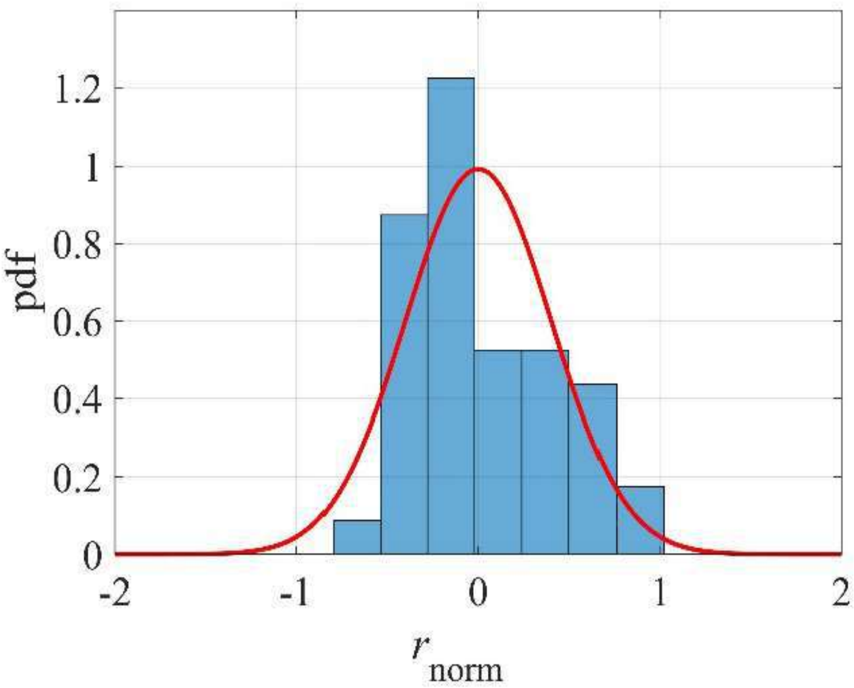
$$r = \frac{K}{N\left(1 - \frac{N}{N_\infty}\right)}$$

$$r_{norm} = (r - \langle r \rangle)/\langle r \rangle$$

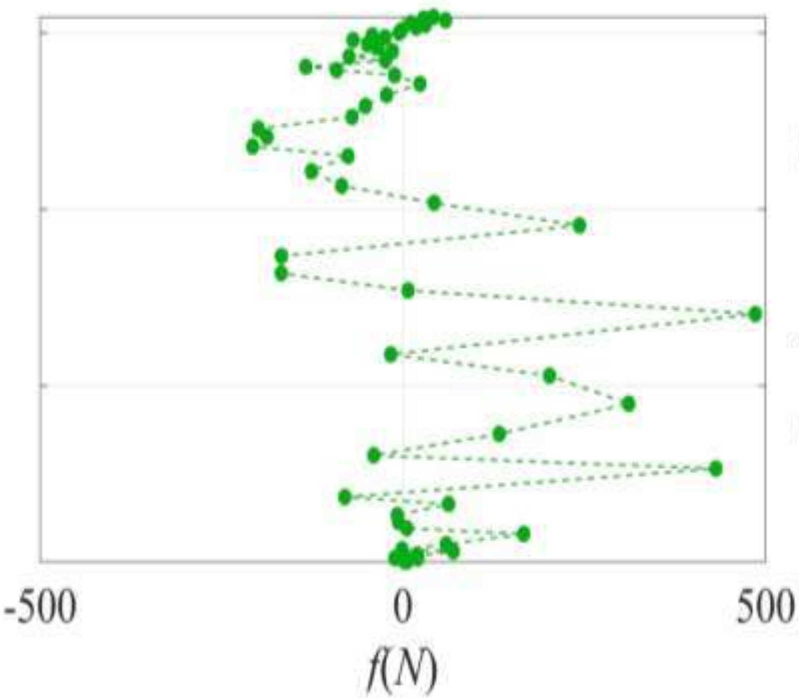


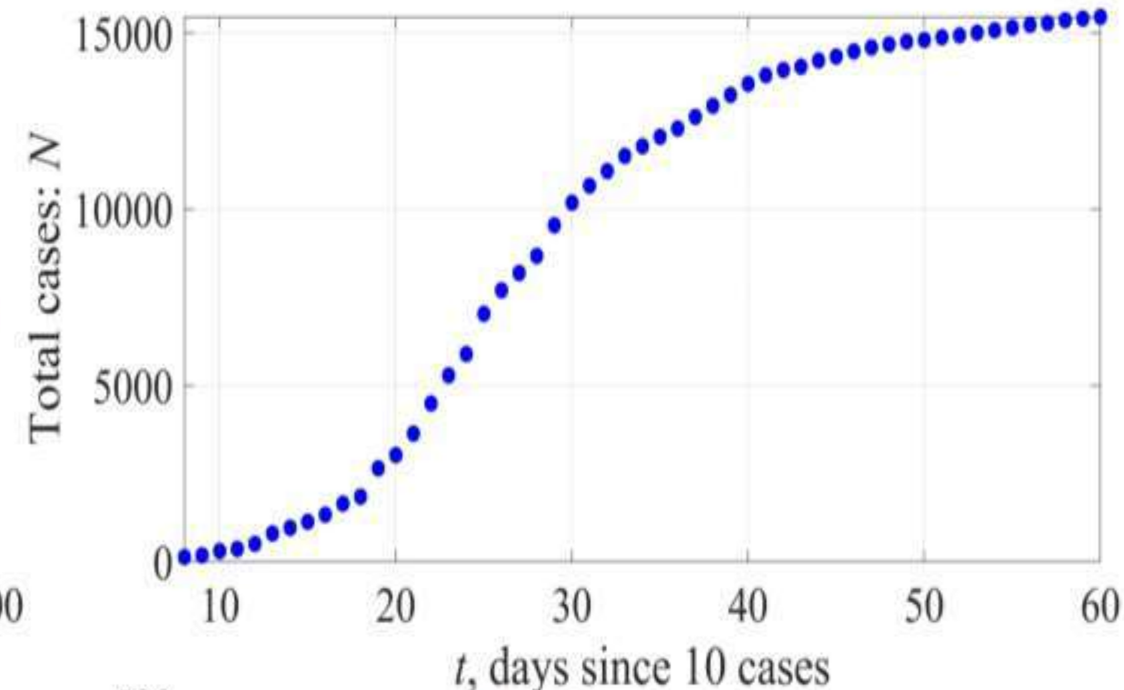
Изменчивость коэффициента *r* (Австрия)



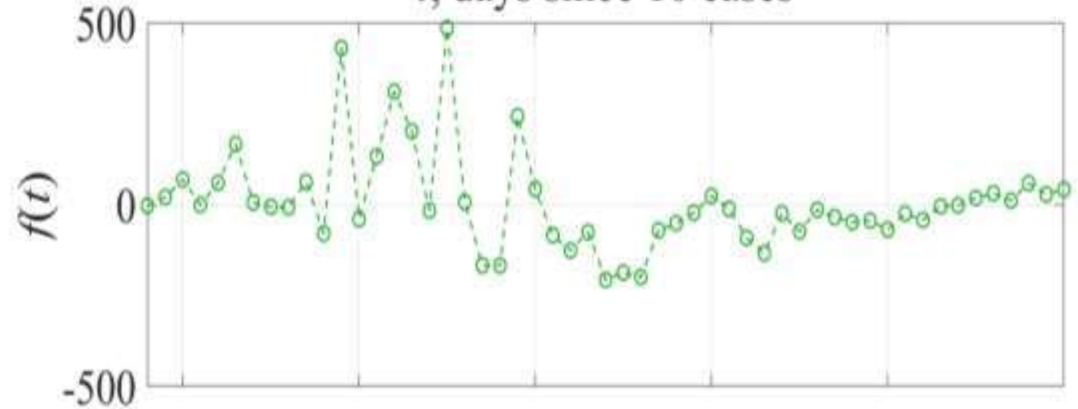


Логистическое уравнение с внешней силой (Австрия)



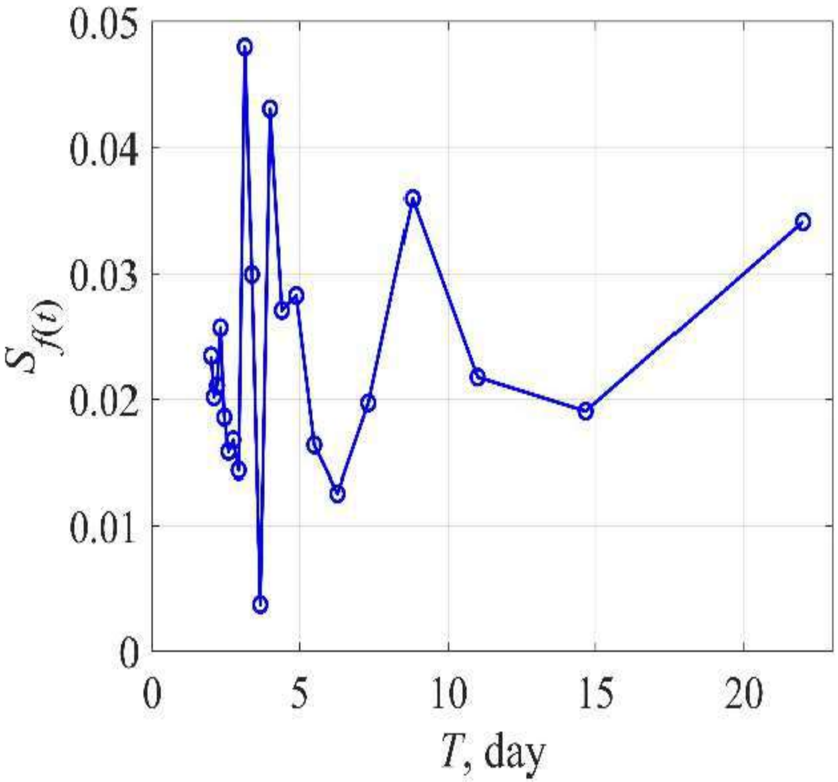


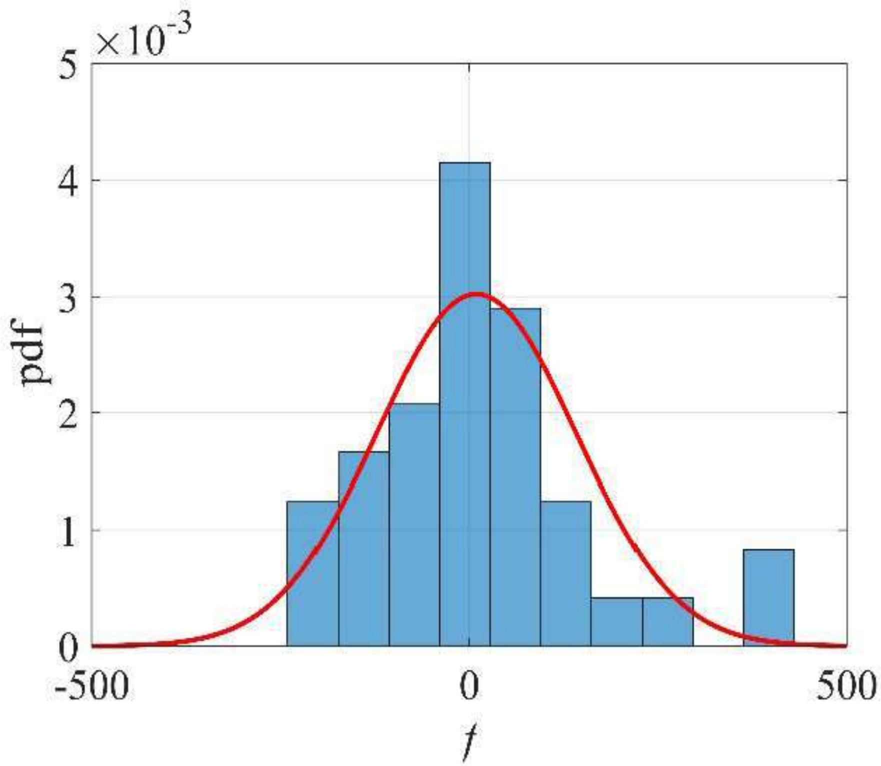
$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{N_\infty}\right) + f(t)$$



f – внешняя сила для учета нерегулярности исходных данных

Логистическое уравнение с внешней силой (Австрия)





Обобщенное логистическое уравнение

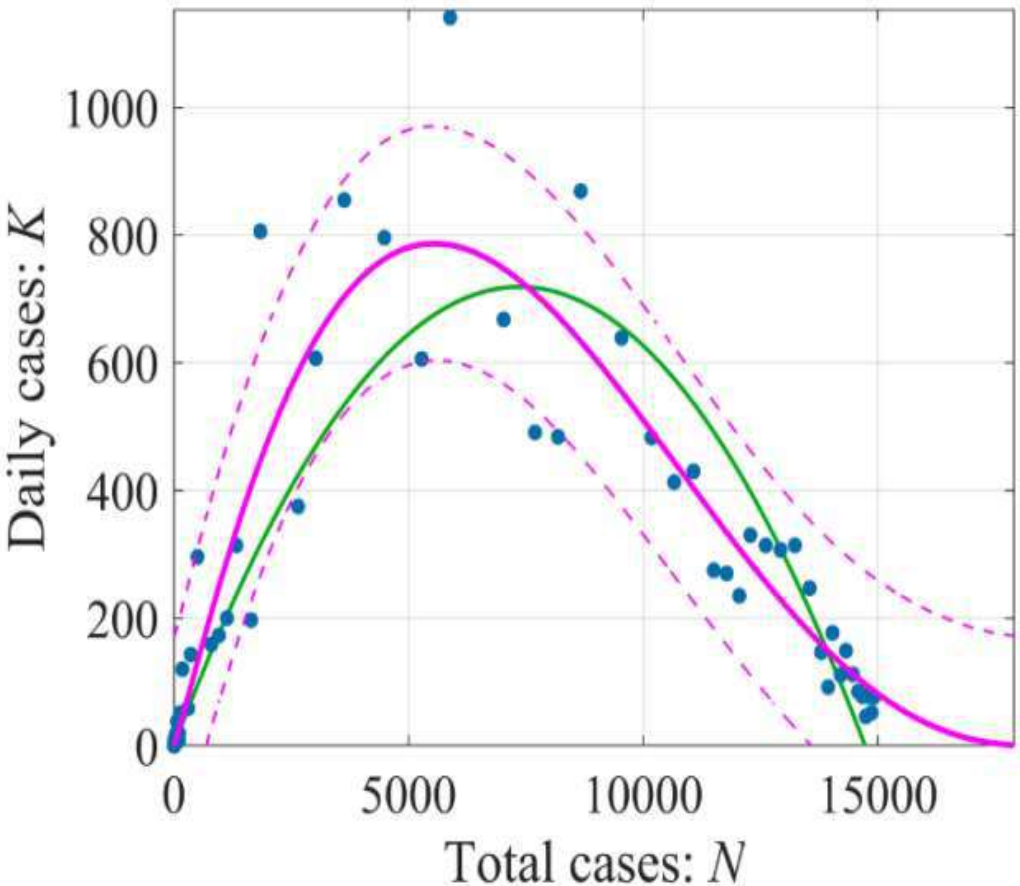
$$\frac{dN}{dt} = rN^{\alpha}\left(1-\frac{N}{N_{\infty}}\right)^{\beta}$$

Для аппроксимации реальных данных используются 4 параметра

$$K_n = N_{n+1} - N_n = rN_n^{\alpha}\left(1-\frac{N_n}{N_{\infty}}\right)^{\beta}$$

$$K = rN^{\alpha}\left(1-\frac{N}{N_{\infty}}\right)^{\beta}$$

Австрия

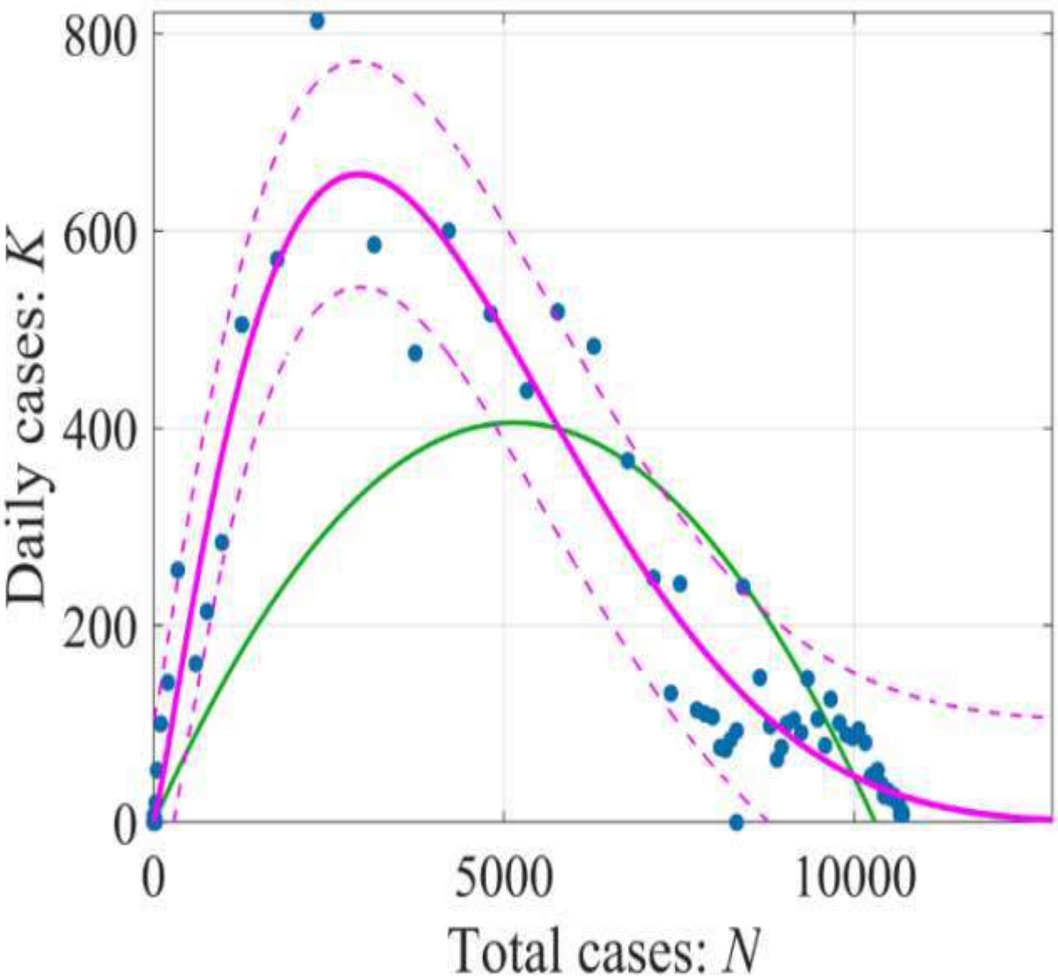


$$\alpha = 1.1 \quad \beta = 2.6$$

R^2= 0.88

было R^2= 0.81

Сиреневая линия - обобщенная модель, пунктирная линия - 95% доверительный интервал. Зеленая линия - простая логистическая модель

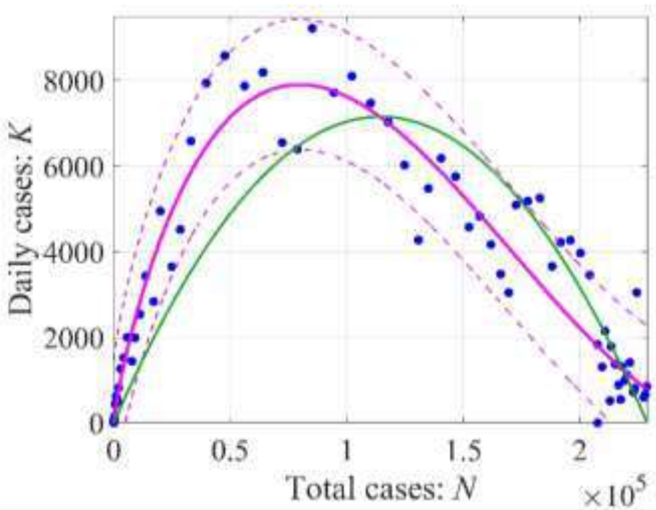


Южная Корея

$$\alpha = 1.2 \quad \beta = 5.4$$

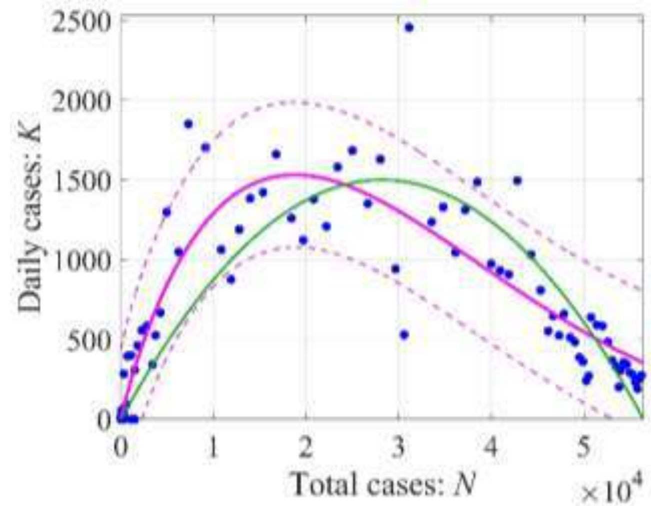
$R^2 = 0.91$

было $R^2 = 0.55$

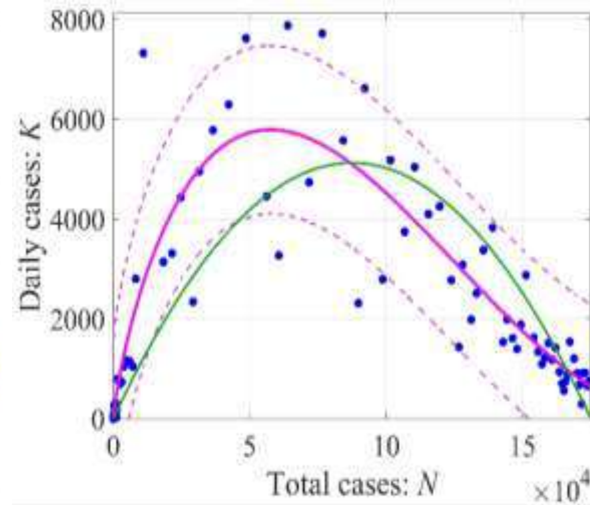


Испания

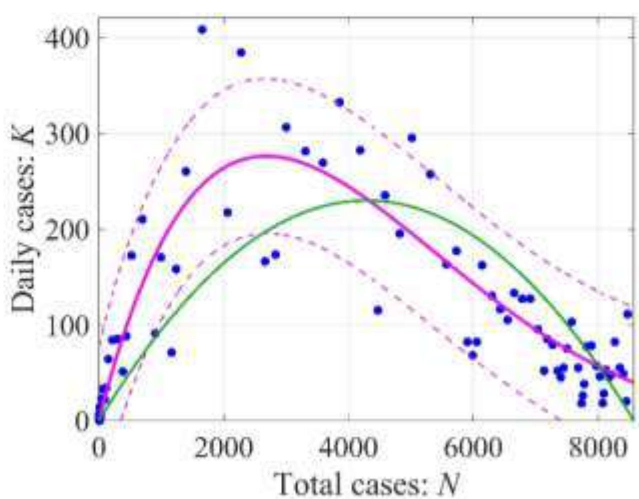
$R^2 = 0.8 - 0.9$



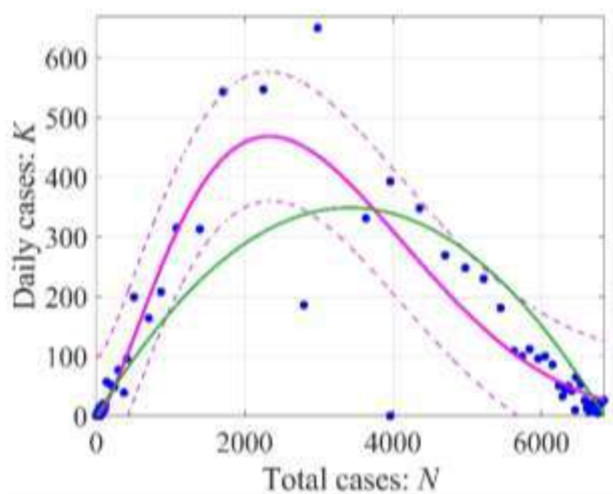
Бельгия



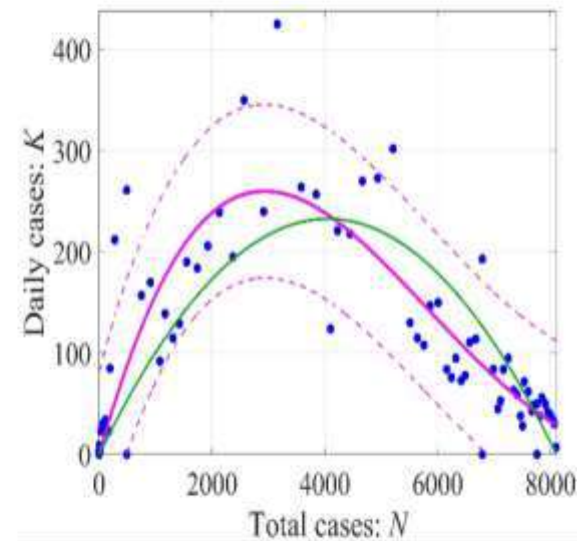
Германия



Чехия

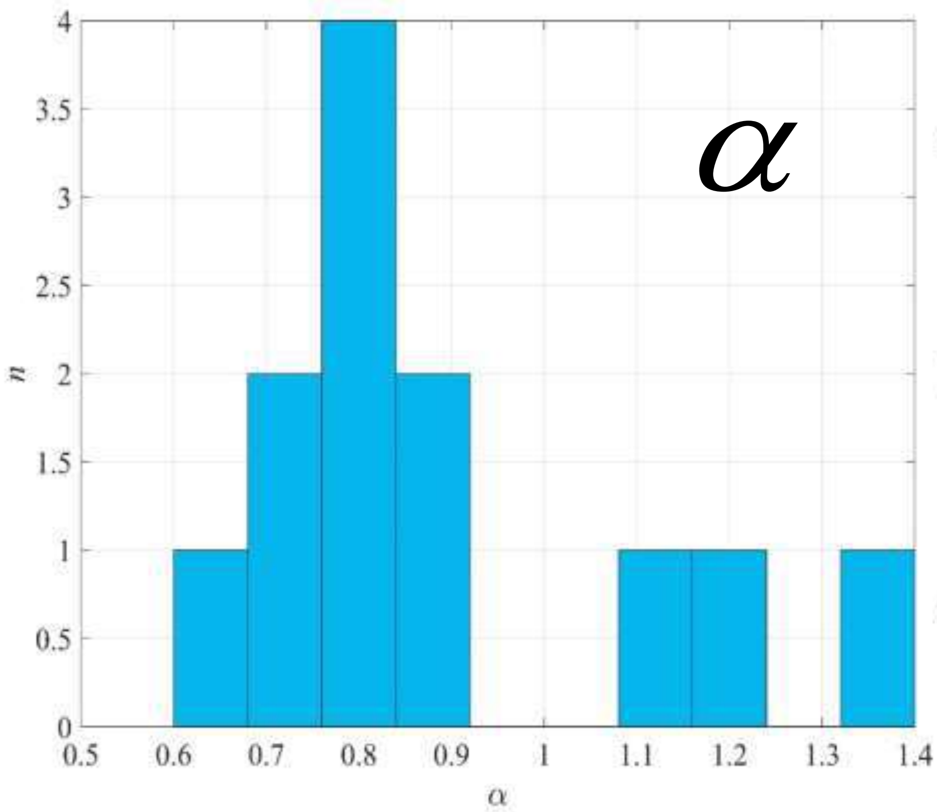


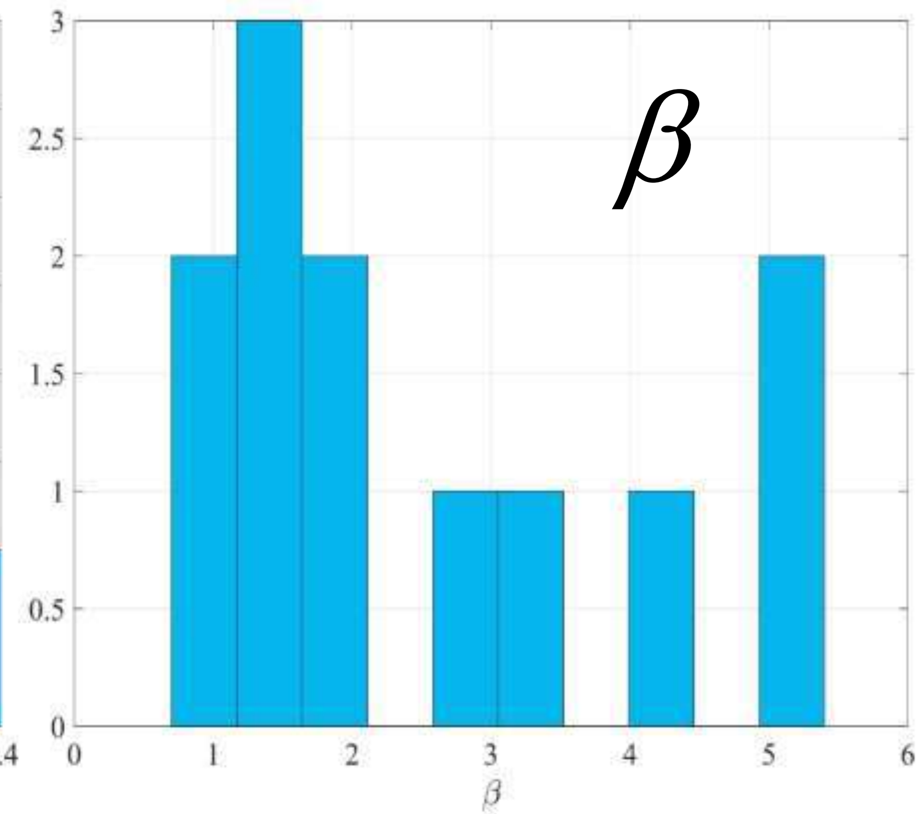
Австралия



Норвегия

Простейший анализ для 12 стран

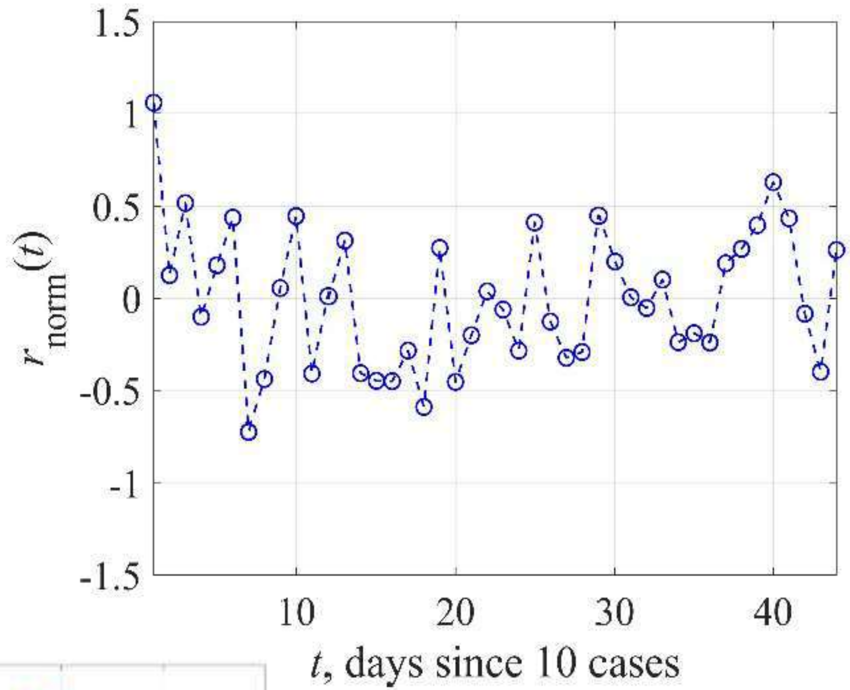


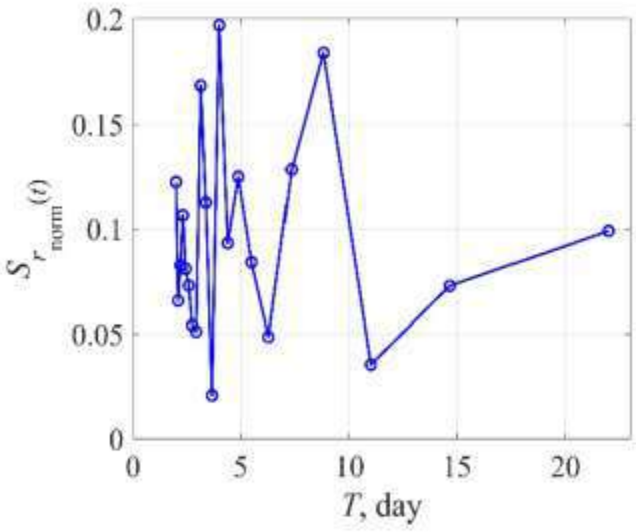


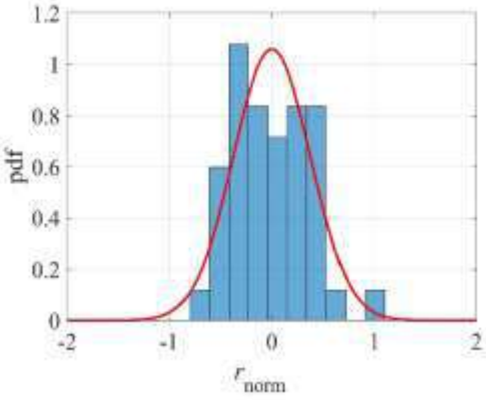
Изменчивость коэффициента *r* (Австрия)

$$\boxed{\frac{dN}{dt} = r(t)N^{\alpha}\left(1-\frac{N}{N_{\infty}}\right)^{\beta}}$$

$$r_{norm} = \left(r - \langle r \rangle\right)/\langle r \rangle$$

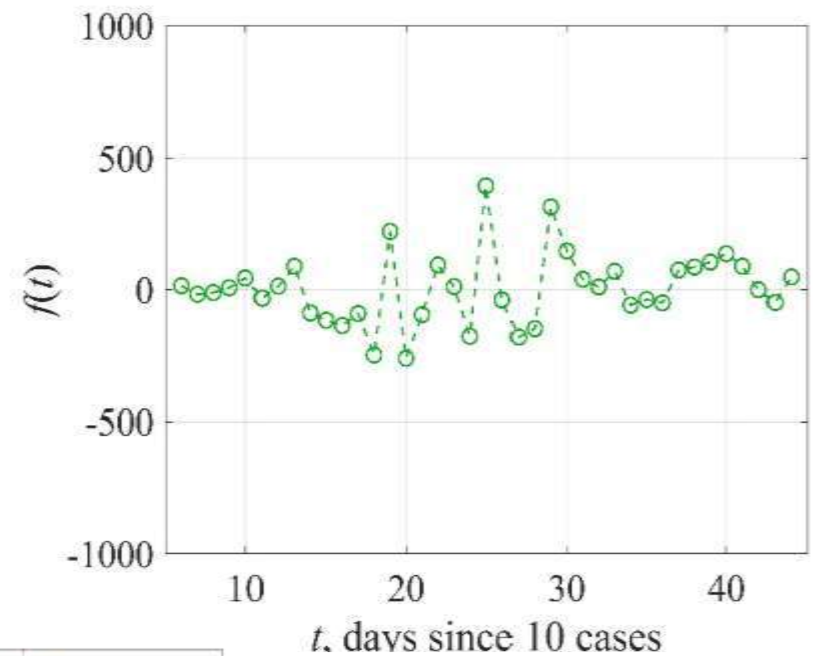


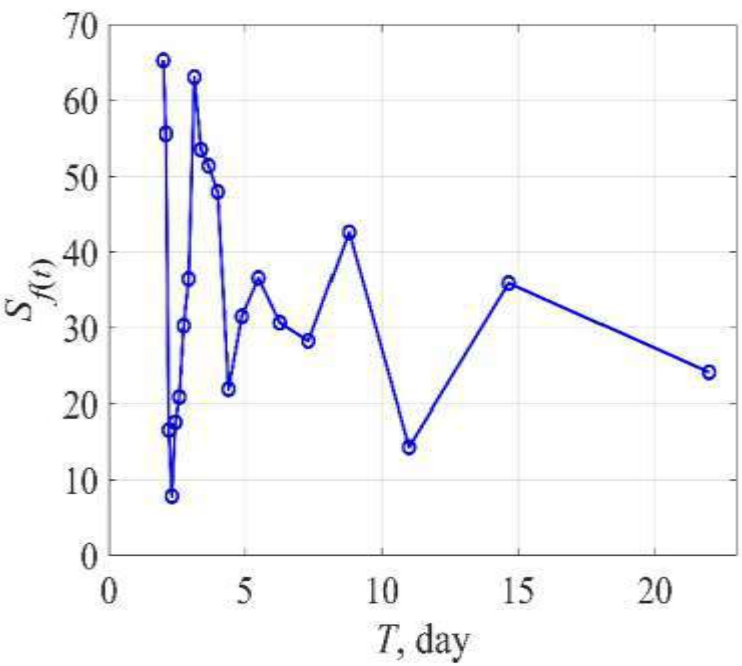


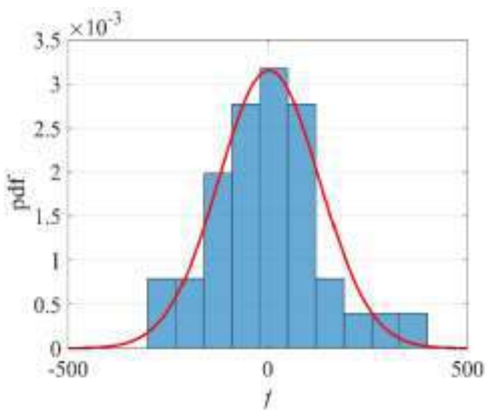


Обобщенное логистическое уравнение с внешней силой (Австрия)

$$\frac{dN}{dt} = rN^{\alpha}\left(1 - \frac{N}{N_{\infty}}\right)^{\beta} + f(t)$$

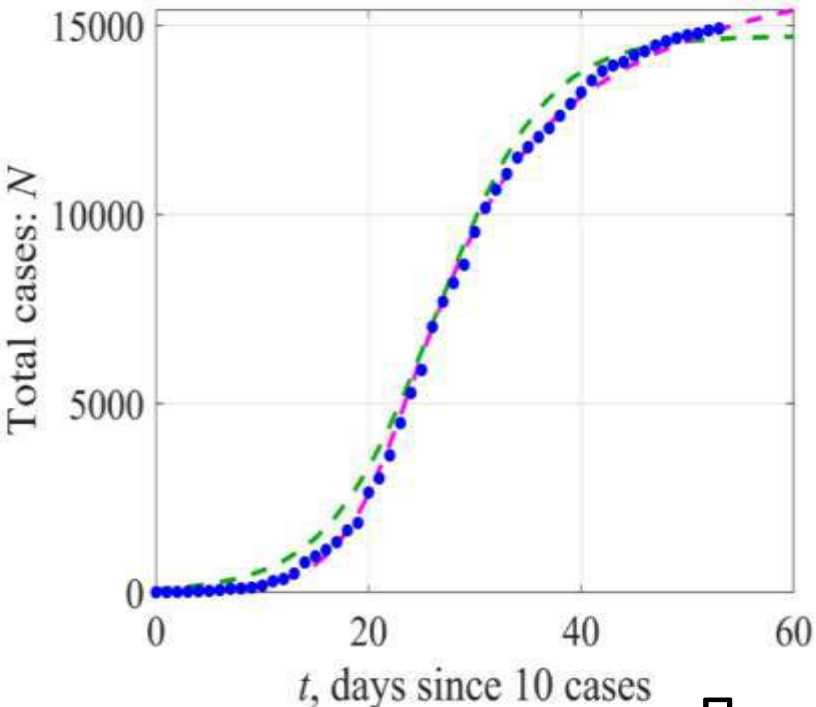




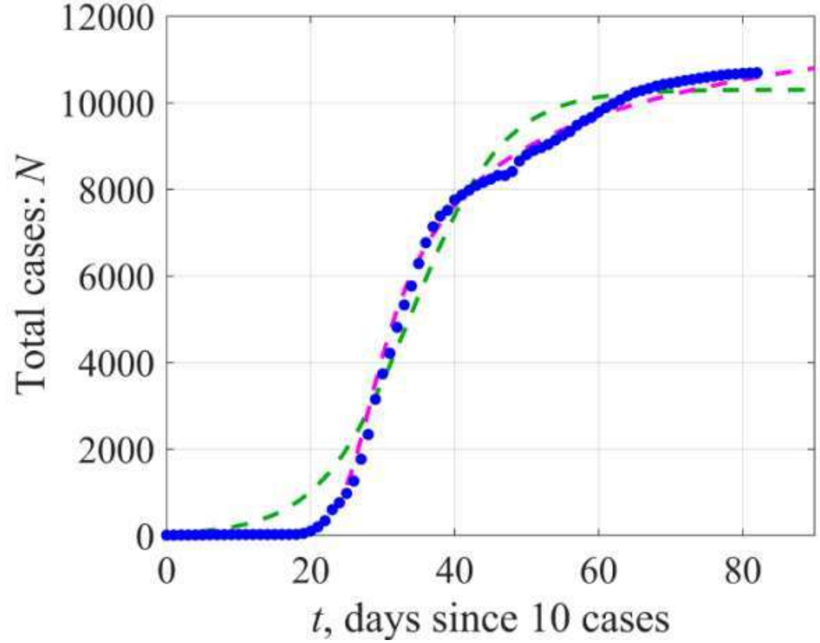


Распространение эпидемии

Австрия



Южная Корея



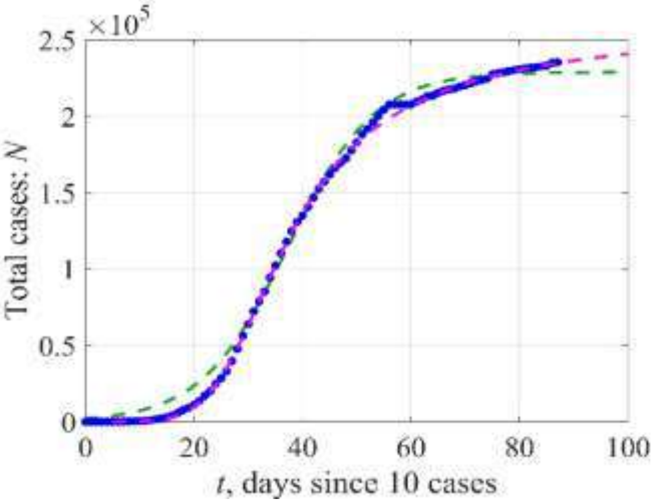
Почти идеальное совпадение в обобщенной логистической модели

синий - данные,

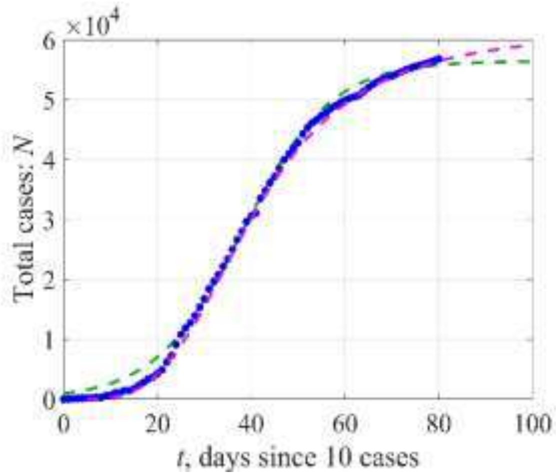
зеленый – простая логистическая модель,

сиреневый – обобщенная логистическая модель

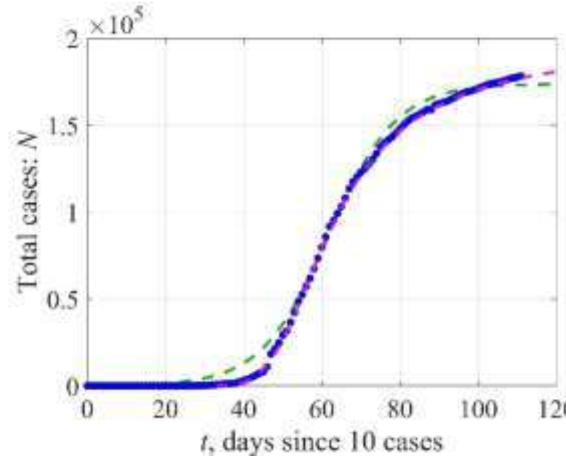
Распространение эпидемии



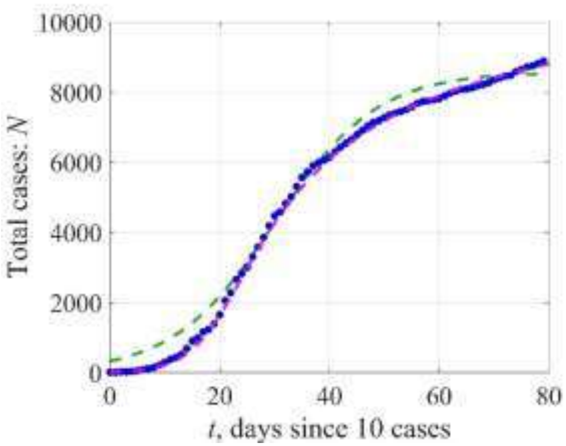
Испания



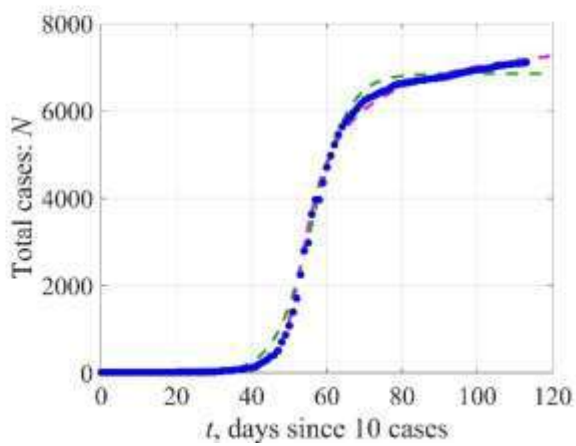
Бельгия



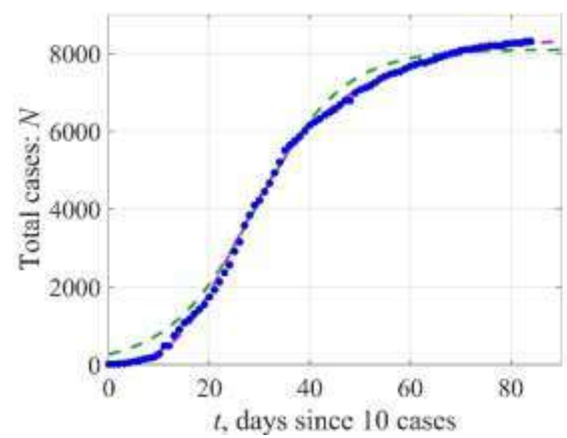
Германия



Чехия



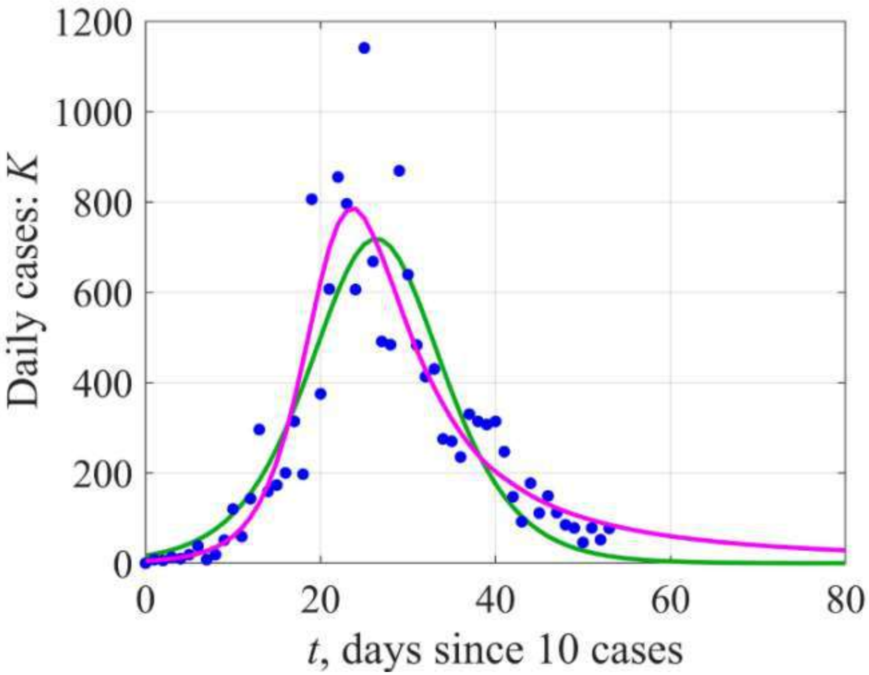
Австралия



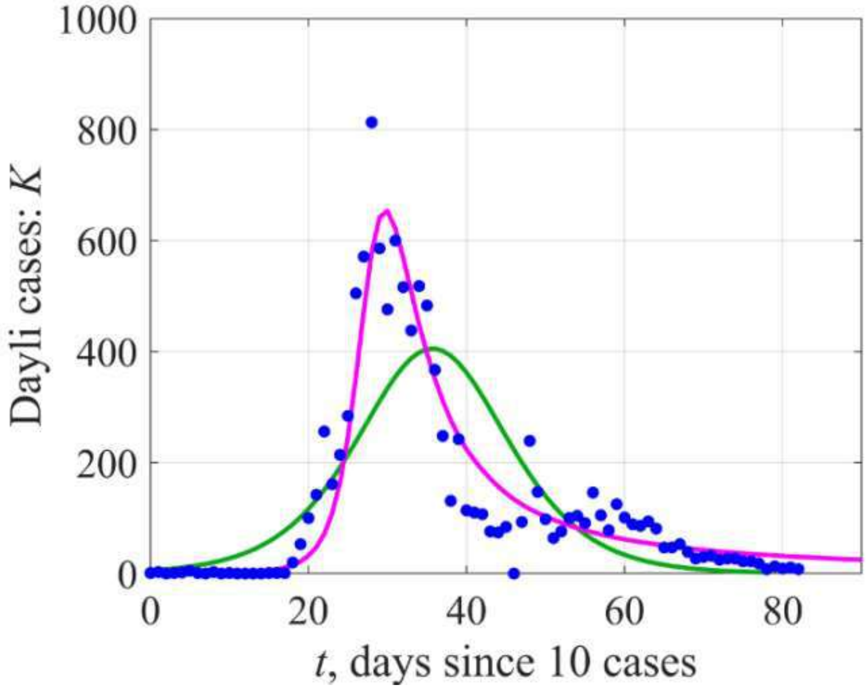
Норвегия

Количество зараженных людей в день

Австрия



Южная Корея



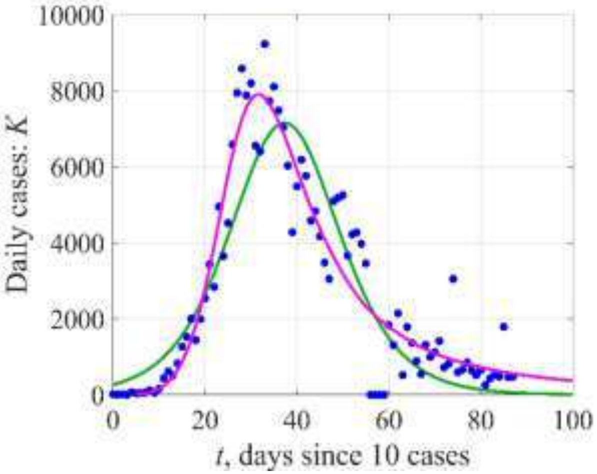
Не идеальное совпадение в обобщенной логистической модели

синий - данные,

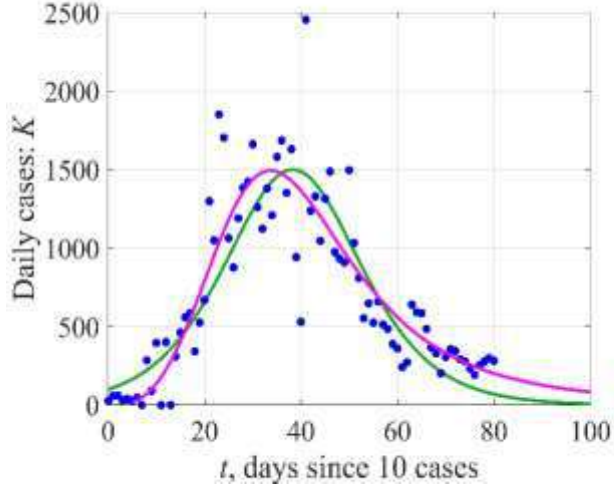
зеленый – простая логистическая модель,

сиреневый – обобщенная логистическая модель

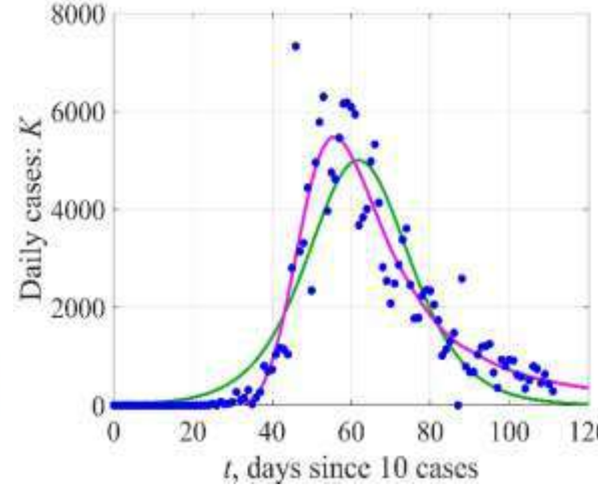
Количество зараженных людей в день



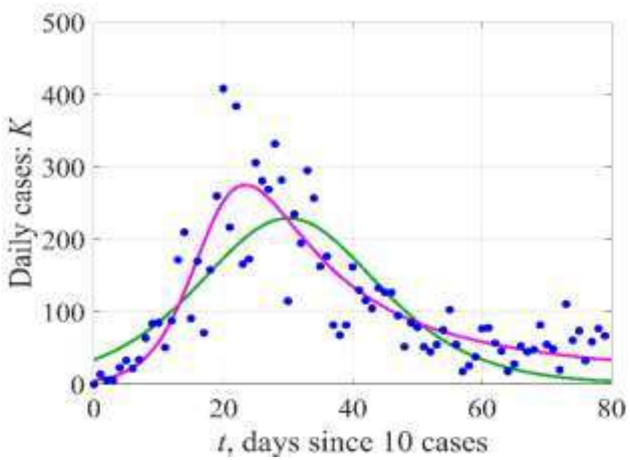
Испания



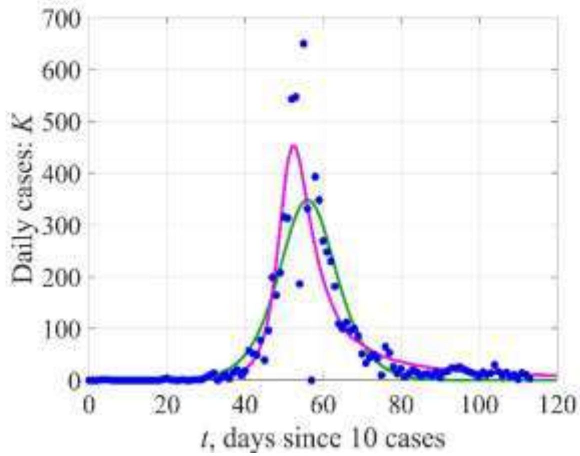
Бельгия



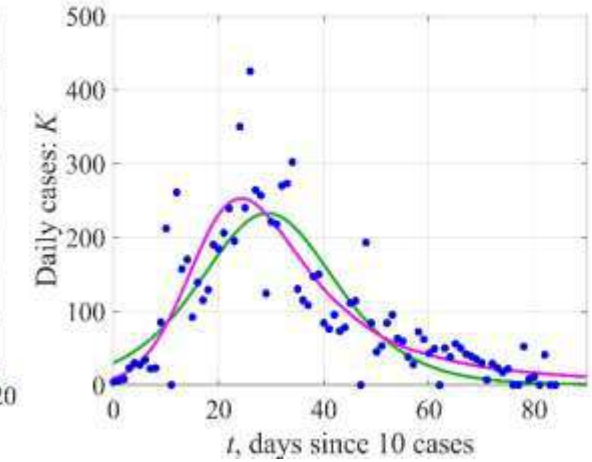
Германия



Чехия



Австралия



Норвегия

Логистическое уравнение с запаздыванием

Начальная стадия эпидемии:

$$N(t) = N_0 \exp[\lambda r(t - T)], \quad t > T$$

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N(t-T)}{N_\infty}\right)$$

$$\frac{dN}{dt} = rN(t-T)\left(1 - \frac{N}{N_\infty}\right)$$

Мы планируем изучить применимость этой модели к COVID-19.

Заключение

Для реального прогноза развития эпидемии необходимо иметь многофакторные модели, включающие в себя деление населения на различные группы (дети, старики и т.д.), условия жизни (транспортные потоки между территориями, скученность населения и т.д.). Такие модели должны включать в себя ODE и PDE высокого порядка, учитывать запаздывающие аргументы и интегральные члены.

Тем не менее, анализ в рамках простых малопараметрических моделей важен, поскольку позволяет описать качественно процесс. В этом смысле полученные выше результаты демонстрируют возможности хорошо развитой логистической модели для описания эпидемии такого масштаба как COVID-19.