

# Априорное определение порога перколяции на квадратных решётках

П.В. Москалев (moskalefff@gmail.com)

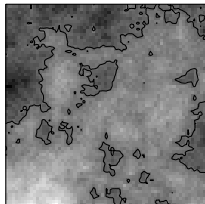
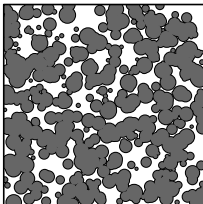
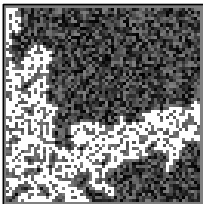
Воронежский государственный аграрный университет  
имени императора Петра I

Общероссийский семинар  
«Информатика, управление и системный анализ»,  
Факультет вычислительной математики и кибернетики  
Московского государственного университета  
имени М.В. Ломоносова,  
16 февраля 2021 г.

# Разновидности перколяционных моделей

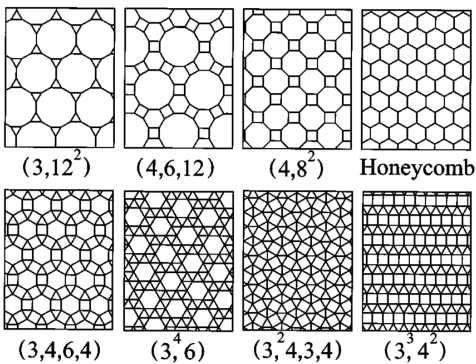
Перколяционные модели предназначены для анализа глобальных свойств связанных подмножеств в случайно-неоднородной среде, по способу аппроксимации которой выделяют модели решеточной, континуальной и потенциальной перколяции.

- ▶ В моделях решёточной перколяции рассматриваются однородные графы, взвешенные некоторой случайной величиной  $s_i < p$ .
- ▶ В моделях континуальной перколяции евклидово пространство, заполняется множеством частиц со случайными координатами и размерами  $r_i + r_j < \rho_{ij}$ .
- ▶ В моделях потенциальной перколяции в евклидовом пространстве рассматриваются сечения потенциальной поверхности  $\phi(x) < \phi_0$ .



# Разновидности Архимедовых решёток

В моделях решёточной перколяции на плоскости используются Архимедовы решётки, структура которых соответствует одноимённым мозаикам, т.е. разбиениям плоскости правильными многоугольниками.



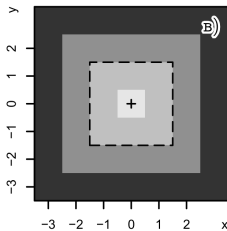
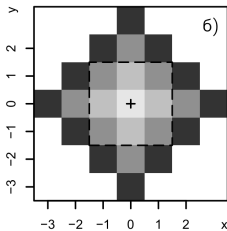
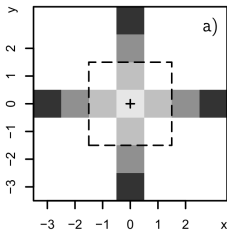
Архимедовы решётки:  $(3,12^2)$  усеч. шестиугольная;  $(4,6,12)$  ромбоусеч. тришестиугольная;  $(4,8^2)$  усеч. квадратная;  $(6^3)$  шестиугольная и т.д.

# От $(1, 0)$ до $(1, \infty)$ -окрестности

Для квадратной решётки известны две предельные формы единичной окрестности: а) фон Неймана (слева); в) окрестность Мура (справа). Однако, взвешивание узлов окрестности Мура позволяет получить множество промежуточных вариантов  $(1, d)$ -окрестностей:

$$U_{\epsilon, d}(b) = \{a : \rho_d(a, b) \leq \epsilon\}, \quad \rho_d(a, b) = \left( \sum_{i=1}^2 |a_i - b_i|^d \right)^{1/d},$$

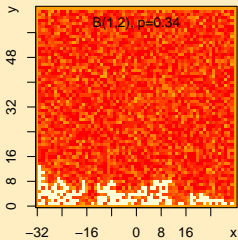
где  $d > 0$  — показатель неметрического расстояния Минковского.



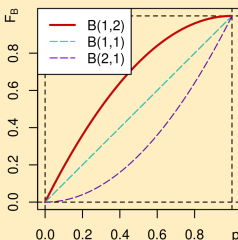
# Реализации изотропных кластеров узлов

Изотропный кластер формируется при итерационном объединении достижимых узлов из  $(1, 0)$ -окрестности текущего периметра с условием достижимости узла  $(x, y)$ :  $s_{xy} < p$ , где  $\{s_{xy}\}$  — выборка случайной величины  $S \sim B(a, b)$ ;  $a > 0$ ,  $b > 0$  — параметры взвешивающего распределения;  $0 \leq p \leq 1$  — доля достижимых узлов. Тогда свойства формируемых кластеров зависят от формы и размеров перколяционной решётки, формы и размеров окрестности ее узла, параметров взвешивающего распределения, доли достижимых узлов, стартового и целевого подмножеств.

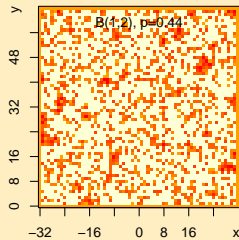
$p = 0,34 < p_c$



$S \sim B(1, 2)$



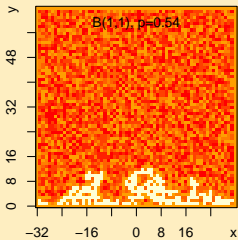
$p = 0,44 > p_c$



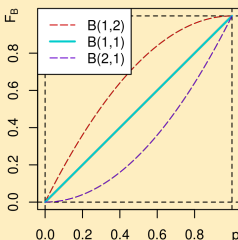
# Реализации изотропных кластеров узлов

Изотропный кластер формируется при итерационном объединении достижимых узлов из  $(1, 0)$ -окрестности текущего периметра с условием достижимости узла  $(x, y)$ :  $s_{xy} < p$ , где  $\{s_{xy}\}$  — выборка случайной величины  $S \sim B(a, b)$ ;  $a > 0$ ,  $b > 0$  — параметры взвешивающего распределения;  $0 \leq p \leq 1$  — доля достижимых узлов. Тогда свойства формируемых кластеров зависят от формы и размеров перколяционной решётки, формы и размеров окрестности ее узла, параметров взвешивающего распределения, доли достижимых узлов, стартового и целевого подмножеств.

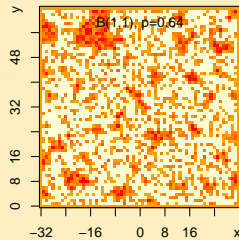
$$p = 0,54 < p_c$$



$$S \sim B(1, 1)$$



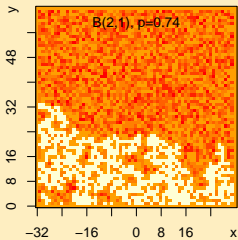
$$p = 0,64 > p_c$$



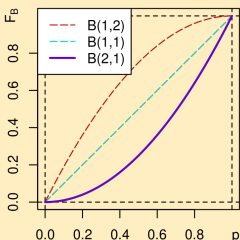
# Реализации изотропных кластеров узлов

Изотропный кластер формируется при итерационном объединении достижимых узлов из  $(1, 0)$ -окрестности текущего периметра с условием достижимости узла  $(x, y)$ :  $s_{xy} < p$ , где  $\{s_{xy}\}$  — выборка случайной величины  $S \sim B(a, b)$ ;  $a > 0$ ,  $b > 0$  — параметры взвешивающего распределения;  $0 \leq p \leq 1$  — доля достижимых узлов. Тогда свойства формируемых кластеров зависят от формы и размеров перколяционной решётки, формы и размеров окрестности ее узла, параметров взвешивающего распределения, доли достижимых узлов, стартового и целевого подмножеств.

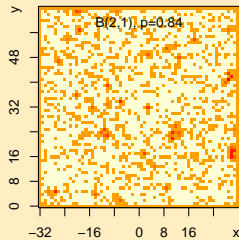
$p = 0,74 < p_c$



$S \sim B(2, 1)$



$p = 0,84 > p_c$



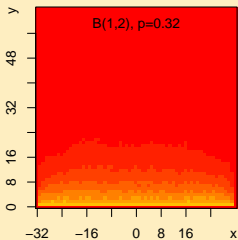
## Выборки изотропных кластеров узлов

Для оценки статистически устойчивых параметров отдельные реализации изотропных кластеров объединяются в выборки, для которых строятся распределения относительных частот  $w_{xy}$  принадлежности  $(x, y)$ -узлов перколяционной решетки к анализируемой выборке реализаций.

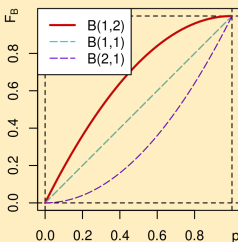
Оценки параметров для выборки таких кластеров узлов могут быть получены с помощью статистики целевых подмножеств узлов перколяционной решётки.

Применение этого подхода для оценки порога перколяции и мощности кластеров узлов на квадратных решетках показано в работах [1–4].

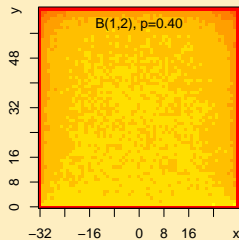
$p = 0,32 < p_c$



$S \sim B(1, 2)$



$p = 0,40 > p_c$



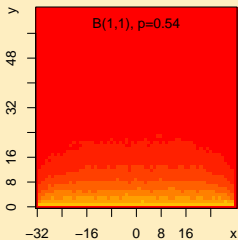


# Выборки изотропных кластеров узлов

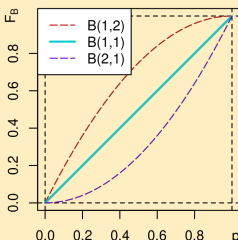
Для оценки статистически устойчивых параметров отдельные реализации изотропных кластеров объединяются в выборки, для которых строятся распределения относительных частот  $w_{xy}$  принадлежности  $(x, y)$ -узлов перколяционной решетки к анализируемой выборке реализаций.

Оценки параметров для выборки таких кластеров узлов могут быть получены с помощью статистики целевых подмножеств узлов перколяционной решётки. Применение этого подхода для оценки порога перколяции и мощности кластеров узлов на квадратных решетках показано в работах [1–4].

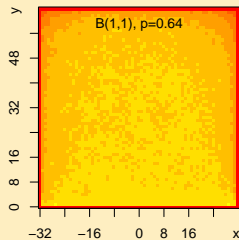
$p = 0,54 < p_c$



$S \sim B(1, 1)$



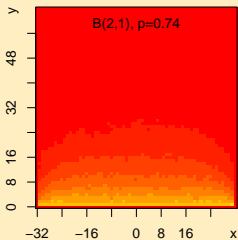
$p = 0,64 > p_c$



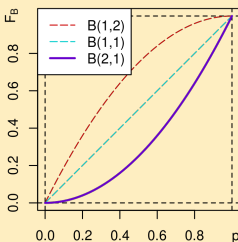
## Выборки изотропных кластеров узлов

Для оценки статистически устойчивых параметров отдельные реализации изотропных кластеров объединяются в выборки, для которых строятся распределения относительных частот  $w_{xy}$  принадлежности  $(x, y)$ -узлов перколяционной решетки к анализируемой выборке реализаций. Оценки параметров для выборки таких кластеров узлов могут быть получены с помощью статистики целевых подмножеств узлов перколяционной решётки. Применение этого подхода для оценки порога перколяции и мощности кластеров узлов на квадратных решетках показано в работах [1–4].

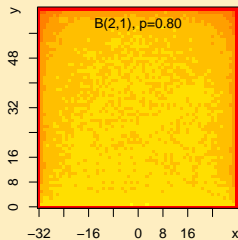
$p = 0,74 < p_c$



$S \sim B(2, 1)$



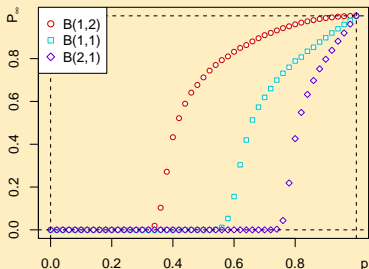
$p = 0,80 > p_c$



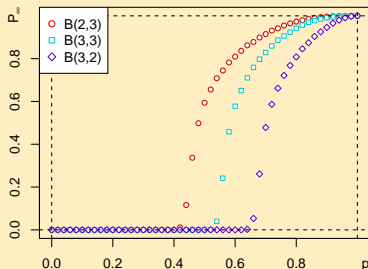
# Оценка мощности изотропных кластеров

На неограниченной решетке мощность перколяционного кластера  $P_\infty$  соответствует вероятности того, что случайно выбранный узел решетки будет принадлежать перколяционному кластеру, причём  $P_\infty(p) = 0$  при  $p \leq p_c$  и  $P_\infty(p) > 0$  при  $p > p_c$ , где  $p_c$  — порог перколяции для данной решетки. Для оценки мощности перколяционного кластера  $P_\infty^*(p)$  на рассматриваемых решётках воспользуемся усреднённой относительной частотой подмножества узлов вдоль верхней границы этих решёток.

$S \sim B(1, 2), B(1, 1), B(2, 1)$



$S \sim B(2, 3), B(3, 3), B(3, 2)$

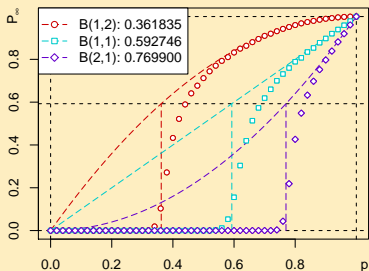


# Оценка порога перколяции

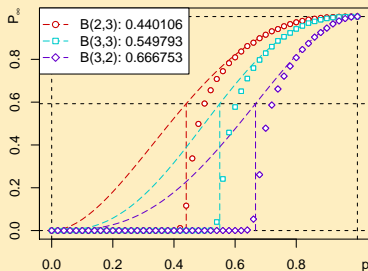
Анализируя полученные оценки  $P_{\infty}^*(p)$  заметим, что при  $p > p_c$  все они демонстрируют сходимость к функциям распределений  $F_S(p)$  с.в.  $S \sim B(a, b)$ , взвешивающих узлы перколяционной решетки.

Тогда значение порога перколяции допускает априорную оценку  $p_c = F^{-1}(p_0)$ , где уровень  $p_0$  квантиля определяется характеристиками окрестности узла перколяционной решетки [5], используемой при построении кластера. Для квадратной решетки с  $(1, 0)$ -окрестностью  $p_0 = 0,592746 \dots$

$S \sim B(1, 2), B(1, 1), B(2, 1)$



$S \sim B(2, 3), B(3, 3), B(3, 2)$



# Библиография

1. *Moskalev P.V.* SPSL: Site Percolation on Square Lattices. — CRAN, 2019. — URL: <https://cran.r-project.org/package=SPSL> (online; accessed: 17.03.2019). — R package version 0.1-9.
2. *Moskalev P.V.* SECP: Statistical Estimation of Cluster Parameters. — CRAN, 2012. — URL: <https://cran.r-project.org/package=SECP> (online; accessed: 09.07.2012). — R package version 0.1-4.
3. *Москалев П.В.* Структура моделей перколяции узлов на трёхмерных квадратных решётках // Компьютерные исследования и моделирование. — 2014. — Т.5, №4. — С.607–622 — DOI: [10.20537/2076-7633-2013-5-4-607-622](https://doi.org/10.20537/2076-7633-2013-5-4-607-622).
4. *Москалев П.В.* Оценки порога перколяции и мощности перколяционных кластеров на квадратной решётке с  $(1, \pi)$ -окрестностью // Компьютерные исследования и моделирование. — 2014. — Т.6, №3. — С.405–414. — DOI: [10.20537/2076-7633-2014-6-3-405-414](https://doi.org/10.20537/2076-7633-2014-6-3-405-414).
5. *Moskalev P.V.* Convergence of percolation probability functions to cumulative distribution functions on square lattices with  $(1,0)$ -neighborhood // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. — 2020. — Vol.553. — P.124657 — DOI: [10.1016/j.physa.2020.124657](https://doi.org/10.1016/j.physa.2020.124657).



## Доклад завершён. Вопросы?

Спасибо за внимание!